I Projections et bases orthonormales

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, canoniquement euclidien, de la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}\{(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$.

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $F = \big\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x+y+z+t = x-y-z+t = 0\big\}$.

1. Montrer que F est un plan de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.

2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F (pour le produit scalaire usuel).

3. Soit $u = (1,1,1,1)$. Déterminer $d(u, F^{\perp})$.

Exercice 3 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $\mathbb{R}^4$ euclidien, muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$

1. Trouver une base orthonormale de H engendré par $a = e_1 + e_2 + e_3$ et $b = e_1 - e_4$.

2. Donner la matrice dans B de la projection orthogonale sur H.

3. Calculer $d(e_1, H)$.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique. Soient $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $H = \mathrm{Vect}\{X, Y\}$. Écrire la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur H.

Exercice 5 *[Solution]*
Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien, former la matrice dans la base canonique de la réflexion par rapport au plan d'équation $ax+by+cz = 0$, où $n = (a,b,c)$ est supposé unitaire.

Exercice 6 **(CPP PSI 2017)** *[Solution]*
Dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement euclidien, écrire la matrice, dans la base canonique, de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x - 2y + z = 0$.

Exercice 7 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $E = \mathcal{C}^2([0,\pi],\mathbb{R})$ que l'on munit du produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $G = \{t \in E, t'' + t = 0\}$

1. Montrer qu'il existe t_1, t_2 tels que $G = \mathrm{Vect}\{t_1, t_2\}$

2. Calculer $(t_1|t_2)$

3. En déduire l'expression de la projection orthogonale de $f \in E$ sur G

Exercice 8 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*
u et v étant deux vecteurs distincts et non nuls de E, espace euclidien, on note H l'hyperplan normal à $u - v$ et r_H la réflexion par rapport à H (symétrie orthogonale par rapport à H.

1. Montrer que s'il existe une réflexion r telle que $r(u) = v$ alors $\|u\| = \|v\|$

2. Démontrer la réciproque.
indication : vérifier que si $\|u\| = \|v\|$ alors $u + v \perp u - v$.

3. Application : on se place dans $\mathbb{R}^4$ canoniquement euclidien avec $u = (1,-1,1,0)$ et $v = (0,-1,1,1)$; écrire la matrice dans la base canonique de la réflexion qui échange u et v.

Exercice 9 **(Centrale PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $\phi(x) = e^{-x^2}$

1. Montrer que ϕ est $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\phi^{(n)} = P_n \times \phi$.
Quel est le degré de P_n ?

2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour le produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$
indication : IPP sur $(P_n|P_m)$ si $n < m$

3. Montrer que P_n est scindé à racines simples.
indication : vérifier que $P_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et, en supposant que P_n possède au plus $n-1$ racines, considérer $(P_n|Q)$ avec Q qui change de signe en même temps que P_n.

Exercice 10 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de I_n et déterminer sa valeur
2. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$
3. On pose $L_n = \dfrac{e^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(e^{-x}x^n\right)$. Montrer que L_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$
4. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormale.
   indication : calculer $(L_i|L_j)$ avec $i \leqslant j$ par IPP
5. Montrer que L_n est scindé à racines simples dans $\mathbb{R}^+$.
   indication : introduire les points où L_n change de signe sur $\mathbb{R}^+$ et raisonner par l'absurde en introduisant un polynôme simple qui change de signe en même temps que L_n sur $\mathbb{R}^+$.

II Produits scalaires

Exercice 11 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Montrer que $(f|g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 12 **(Mines-Ponts PC 2014)** *[Solution]*

1. Montrer que $(f|g) = f(0)g(0) + \displaystyle\int_{-1}^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$.
2. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé

1. Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; déterminer $\dim(E)$ et $d(1,E)$
3. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 14 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit E l'espace des suites réelles de période 4

1. Montrer que E est un espace vectoriel et en déterminer une base.
   indication : utiliser $\varphi : u \in E \mapsto (u_0, u_1, u_2, u_3)$ pour trouver la dimension de E
2. Montrer que $\phi : (u,v) \in E^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{4}(ku_k - u_{k+1})(kv_k - v_{k+1})$ est un produit scalaire sur E.
3. En donner une base orthonormale
   indication : poser $x_k = ku_k - u_{k+1}$ et $y_k = kv_k - v_{k+1}$ et commencer par « deviner » ce qui conviendrait pour x_k et y_k si $k \in [\![1,4]\!]$.

Exercice 15 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{3} \frac{X-k}{i-k}$, pour $i \in [\![0,3]\!]$

1. Calculer, pour $0 \leqslant i,j \leqslant 3$, $L_i(j)$ et en déduire que $(L_i)_{i\in[\![0,3]\!]}$ est une base de E.
2. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{3}(P(k)+P(1))(Q(k)+Q(1))$ définit un produit scalaire sur E
3. Déterminer une base orthonormale de E.

Exercice 16 **(Mines-Ponts PC 2011)** *[Solution]*
$B(X,Y) = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i y_j}{i+j}$ est-il un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
indication : remarquer que $\dfrac{1}{i+j} = \displaystyle\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}t\,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 **(Mines-Ponts MP 2014)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \dfrac{1}{2\pi} \operatorname{Re}\left(\displaystyle\int_0^{2\pi} P(e^{-it})Q(e^{it})\,\mathrm{d}t \right)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la base canonique est orthonormée.

2. Montrer que $\|P\| \leqslant \sup\limits_{|z|=1} |P(z)|$ puis qu'il existe un unique P de norme 1 et de degré n tel que $\sup\limits_{|z|=1} |P(z)| = 1$.

3. Soit P de degré n tel que $P(0) = 1$ et $P(1) = 0$. Montrer que $\sup\limits_{|z|=1} |P(z)| \geqslant \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$.

Exercice 18 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer qu'il existe une unique famille de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ orthogonale et telle que P_n soit de degré n et de coefficient dominant 1.

3. Montrer que P_n est de la même parité que n.

4. Montrer que P_n est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 **(TPE-EIVP PSI 2019)** *[Solution]*

Soient $a < b$ et $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b (f(u) - f(a))^2\,\mathrm{d}u \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b f'(u)^2\,\mathrm{d}u$; on pourra majorer $(f(x) - f(a))^2$ en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Étudier le cas d'égalité.
indication : $f(u) - f(a) = \displaystyle\int_a^u f'(t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ positive

1. Montrer $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t \right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right) \left(\int_0^1 f(t)^5\,\mathrm{d}t \right)$ et caractériser l'égalité.

2. On suppose de plus $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$, $f(0) = 0$ et $f'(x) \in [0, 1]$ pour tout $x \in [0, 1]$.
Montrer $\displaystyle\int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \right)^2$.
indication : vérifier $f(x) \in [0, 1]$.

III Orthogonalité

Exercice 21 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$.

1. Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

2. V et W sont-ils orthogonaux ? Supplémentaires orthogonaux ?

Exercice 22 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$.

2. On pose $F = \{u \in E, \forall x \in [0, 1], u(x) = 0\}$ et $G = \{u \in E, \forall x \in [-1, 0], u(x) = 0\}$. Montrer que $F \perp G$. F et G sont-ils supplémentaires ?

3. Justifier $G \subset F^\perp$.

4. On veut montrer que $G = F^\perp$: pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1] \\ g(0) & \text{si } x \in [-1, -1/n] \\ \text{affine} & \text{sur } [-1/n, 0] \end{cases}$; calculer $< f_n, g >$ et montrer que $g(0) \displaystyle\int_{-1}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Conclure en utilisant f nulle sur $[0, 1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1, 0]$.

IV Études d'endomorphismes

Exercice 23 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique et f canoniquement associé ; on munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique.

1. Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (x|f(y)) = -(f(x)|y)$
2. Montrer que $\det(f) = (-1)^n \det(f)$. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que f induit sur $\mathrm{Im}(f)$ un endomorphisme injectif. Que peut-on en déduire sur $\dim(\mathrm{Im}(f))$?
4. On suppose $n = 3$. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$.

   f est-il diagonalisable ?

Exercice 24 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, E euclidien, tel que $\forall (x,y) \in E^2, x \perp y \Rightarrow f(x) \perp f(y)$.

1. Montrer que l'image des vecteurs d'une base orthonormée de E sont toutes de même norme (on la note μ).
2. Montrer que $\forall x \in E, \|f(x)\| = \mu \|x\|$.

Exercice 25 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien, $u, v \in E$ linéairement indépendants et $\varphi : x \in E \mapsto (v|x)u - (u|x)v$

1. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$ et son orthogonal sont supplémentaires
2. Écrire la matrice de φ dans une base adaptée à cette décomposition
3. φ est-il diagonalisable ?

Exercice 26 **(Mines-Télécom PSI 2024)** *[Solution]*
Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$

1. Développer $(f(x+y)|x+y)$
2. En déduire une relation entre $(f(x)|y)$ et $(f(y)|x)$
3. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, montrer que $\lambda = 0$. f est-il diagonalisable ?
4. Montrer que $(\ker f)^\perp = \mathrm{Im}(f)$
5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$. Que dire de la matrice de f dans $\mathcal{B}$?

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit u un endomorphisme de E, espace euclidien, tel que $\ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ et $\exists v \in \mathcal{L}(E), \forall (x,y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|v(y))$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$.
   indication : prouver $\mathrm{Im}(v) = (\ker(u))^\perp$.
2. En déduire que $u + v$ est inversible.

V Projecteurs orthogonaux théoriques

Exercice 28 **(Mines-Ponts MP 2013)** *[Solution]*
Soit p un projecteur non nul de E, euclidien.

1. Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
   indication : calculer $(x + ty|p(x+ty))$ *avec* $t \in \mathbb{R}$, $x \in \ker(p)$ *et* $y \in \mathrm{Im}(p)$.
2. En déduire que l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E est une partie fermée bornée de $\mathcal{L}(E)$. *(À faire après le cours sur les evn)*

Exercice 29 *[Solution]*
Soit E un espace euclidiens de dimension n et $(u_1, \ldots, u_{n+2}) \in E^{n+2}$. Montrer par récurrence sur n qu'il existe $(i,j) \in [\![1, n+2]\!]$ tel que $(x_i|x_j) \geqslant 0$.
indication : considérer les projetés orthogonaux des x_i *sur* $\{x_{n+2}\}^\perp$.

Exercice 30 **(Mines-Ponts PSI 2007)** *[Solution]*
Soient A et B deux sous espaces orthogonaux d'un espace euclidien, $C = (A+B)^\perp$. Soient s_A la symétrie orthogonale par rapport à A, s_B la symétrie orthogonale par rapport à B et s_C la symétrie orthogonale par rapport à C. Montrer que $s_A \circ s_B = s_B \circ s_A = s_C$.

Exercice 31 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

1. Montrer que $(X|Y) = X^T Y$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $(\mathrm{Im}\, A)^\perp = \ker(A^T)$
3. Pour $Y \in \mathbb{R}^n$, on pose $f(X) = \|AX - Y\|$ avec $Y \in \mathbb{R}^n$ fixé. Montrer que $f(X_0) = \inf\limits_{X \in \mathbb{R}^n} f(X)$ si et seulement si $A^T(AX_0 - Y) = 0$ et l'existence d'un tel X_0.

VI Familles de vecteurs

Exercice 32 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec les cas d'égalité) dans un espace euclidien.
2. Énoncer et démontrer l'inégalité triangulaire
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système $\begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = n \\ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n \end{cases}$

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien E, muni d'une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$. On note G la matrice de coefficients $(u_i|u_j)$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ et M la matrice des vecteurs u_i dans la base $\mathcal{B}$.

1. Exprimer G en fonction de M et montrer que $\det(G) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si les vecteurs u_i sont liés.
2. Généraliser à une famille de p vecteurs, $p < n$.

Exercice 34 **(Mines-Ponts PSI 2013)** *[Solution]*
Soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs unitaires de E, euclidien de dimension $n < p$, tels qu'il existe une constante $d > 0$ vérifiant $\forall i \neq j, \|x_i - x_j\| = d$. Exprimer d en fonction de p et en déduire que $p = n + 1$. On pourra utiliser la matrice de coefficient $(x_i|x_j)$ et vérifier qu'elle n'est pas inversible si $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée.

Exercice 35 **(ENSEA-ENSIIE MP 2014)** *[Solution]*
Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ une famille de E, espace euclidien de dimension n, telle que si $i \neq j$, $(u_i|u_j) = -1$.

1. Montrer que $< (u, x)|(v, y) >= (u|v) + xy$ est un produit scalaire sur $E \times \mathbb{R}$.
2. Que dire de la famille $((u_i, 1))_{1 \leqslant i \leqslant p}$? Que peut-on en déduire sur n et p ?

Exercice 36 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*

Soit E préhilbertien réel tel qu'il existe une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifiant $\forall x \in E, \sum_{j=1}^{n} (e_j|x)^2 = \|x\|^2$.

Montrer que cette famille est orthonormale et en déduire que E est de dimension finie que l'on précisera.
indication : pour la dimension, considérer $x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$.

Exercice 37 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

Soit E un espace préhilbertien réel et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

indication : commencer par montrer que $\forall (x, y) \in E^2, \left(\sum_{i=1}^{n} (e_i|x) e_i \middle| y \right) = (x|y)$

Exercice 38 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E, espace préhilbertien, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$

1. Montrer que, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\|e_i\| \leqslant 1$.
2. Soit x un vecteur unitaire et orthogonal à $\mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$. Calculer $(x|e_n)^2$ et en déduire $\|e_n\|$.
   indication : Cauchy-Schwarz
3. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

Exercice 39 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille de E, euclidien de dimension n, telle que $\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i|x)^2$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

VII Distances et projections orthogonales

Exercice 40 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $< P, Q >= \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[X]$ pour ce produit scalaire.
3. Calculer $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at + b)^2\,dt$.

Exercice 41 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que (P_0, P_1, P_2) est orthogonale avec $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = X^2 - \frac{1}{3}$ puis donner $\mathrm{Vect}\{P_0, P_1, P_2\}$
4. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ puis $I = \inf\left\{\int_{-1}^{1} P(t)^2\,\mathrm{d}t, P \in \mathbb{R}_2[X]\text{unitaire}\right\}$

Exercice 42 **(Centrale PSI 2008)** *[Solution]*

1. Montrer que $\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{C}^0([0,1])$.
2. Donner une base orthonormée de $F = \{t \mapsto at + bt^2, (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. Déterminer le couple (a,b) tel que $\int_0^1 (1 + at + bt^2)^2\,\mathrm{d}t$ soit minimale.

Exercice 43 **(ENSAM PSI 2010)** *[Solution]*

On munit $E = \mathcal{C}^0([0,\pi])$ du produit scalaire $(f|g) = \int_0^\pi f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer $(\cos|\sin)$, $\|\cos\|$, $\|\sin\|$, $(id|\cos)$ et $(id|\sin)$.
2. Déterminer la projection orthogonale de l'application identité sur l'espace engendré par cos et sin.
3. Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t - t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 44 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*

Sur $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\varphi(P,Q) = -\int_0^1 P(t)Q(t)\ln(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 45 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*

On pose $F = \left\{P \in \mathbb{R}_3[X], \int_0^1 (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 tP(t)\,\mathrm{d}t\right\}$ et on munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Calculer $d(Q,F)$ avec $Q = 1 + X + X^2 + X^3$.
   indication : pour aller plus vite, on peut trouver un vecteur normal à F (qui est un hyperplan)

Exercice 46 **(X PC 2010)** *[Solution]*

On munit $\mathbb{R}_3[X]$ de la base orthonormale $(1, X, X^2, X^3)$.

1. Montrer que $W = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = P(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ de dimension 2.
2. Déterminer la projection orthogonale sur W.

Exercice 47 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

On considère $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{n} b_k X^k$

1. Donner un vecteur normal à $H_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$
2. Calculer $\inf\limits_{P\in H_1} \|P\|$ où $H_1 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 1\}$

Exercice 48 **(Centrale PSI 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \sum\limits_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Trouver une base orthonormée du sous-espace V_0 des polynômes dont la somme des coefficients vaut 0.
3. Si V_1 est le sous-espace (affine) des polynômes dont la somme des coefficients vaut 1, déterminer $\inf\limits_{P\in V_1} \|P\|$.

Exercice 49 **(Centrale PC 2010)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $H_n = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera une équation cartésienne dans la base canonique.
3. Trouver $A_2 \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que H_2 soit le noyau de ϕ définie par $\phi(P) = (A_2|P)$, puis calculer la distance de X^2 à H_2.

Exercice 50 **(CCP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la famille $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pour que $\phi(P, Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Dans ce cas, calculer la distance de X^n à $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
   indication : commencer par définir F à l'aide d'un produit scalaire.

Exercice 51 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X], \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.
   Montrer rapidement que F est un sous-espace vectoriel, déterminer son orthogonal, sa dimension puis calculer $d(1, F)$

Exercice 52 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$; donner sa dimension et $d(X^k, E)$.

Exercice 53 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k q_k$ où (p_k) et (q_k) sont les coefficients de P et Q.

Déterminer la projection orthogonale de 1 sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$.

Exercice 54 **(CCINP PSI 2018)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la projection orthogonale de $P = 1 + X + X^2$ sur $F = \{Q \in \mathbb{R}_2[X], Q'(0) = 0\}$.
   indication : le projeté orthogonal de P se trouve sans chercher une bon de F.

Exercice 55 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*

Pour $f, g \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, on pose $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur E.
2. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$
3. Soit $F = \{f : x \in [0, 1] \mapsto ax + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer le projeté orthogonal de $g : x \mapsto x\ln(x)$ sur F.
4. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$

Exercice 56 **(Mines-Ponts MP 2007)** *[Solution]*
A l'aide d'un projecteur sur un espace judicieusement choisi, minimiser
$I_{a,b} = \displaystyle\int_0^1 (t\ln t - at - b)^2\,\mathrm{d}t$ et préciser les valeurs de a et b réalisant ce minimum.

Exercice 57 **(Centrale PC 2010)** *[Solution]*
Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_1^e (\ln t - a - bt)^2 \,\mathrm{d}t$.

Exercice 58 **(Mines-Ponts PC 2012)** *[Solution]*
Calculer $\min_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} \left(t - \alpha t^2 - \beta\right)^2 e^{-t} \,\mathrm{d}t$

Exercice 59 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Déterminer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 x^2 |\ln(x) - ax - b|^2 \,\mathrm{d}x$.
2. Même question avec $(a,b) \in \mathbb{C}^2$.

Exercice 60 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$ et $\phi(f,g) = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $\|\arcsin\|$
3. Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_{-1}^1 \frac{(\arcsin t - at - b)^2}{\sqrt{1-t^2}} \,\mathrm{d}t$

Exercice 61 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Pour $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, on pose $\varphi(M,N) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} n_{i,j}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On pose $H = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} m_{i,j} = 0 \right\}$. Calculer $d = \inf_{M\in H} \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2$ pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
   indication : déterminer un vecteur normal à H (après avoir justifié que c'est un hyperplan)

Exercice 62 **(CCP MP 2009)** *[Solution]*

1. Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
3. Exprimer la distance d'une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.
4. Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Donner la distance de la matrice J dont tous les coefficients valent 1 à H.

Exercice 63 **(CCP PSI 2007)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(A,B) = \mathrm{Tr}({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\left[I_3, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$ est une famille orthogonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pour ce produit scalaire.
3. Donner le projeté orthogonal de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sur l'espace engendré par cette famille.

Exercice 64 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

1. Montrer que $(A|B) = \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sev de E et déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 65 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

1. Montrer que $(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \,\mathrm{d}t$ est définie et munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire.
2. On note $F = \mathrm{Vect}\{X, X^2, \dots, X^n\}$ et $(P_0, \dots, P_n)$ la base orthonormalisée à partir de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer $P_k(0)^2$.
3. En déduire une base de $F^\perp$ et $d(1,F)$.

Exercice 66 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

1. Montrer que $< A, B >= \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, < X^k, 1 >= k!$

2. Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \mathrm{Vect}\{X, X^2, \dots, X^n\}$. Montrer que $\exists (a_k)_{1\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{R}^n, Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$.

3. Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k(X+1)(X+2)\dots(X+k)$; calculer $< 1-Q, X^i >$ et montrer que $\forall i \in [\![1, n]\!]\,, P(i) = 0$.

4. Montrer que $\inf_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 67 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Solution]*

1. Montrer qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ tel que $(X^i|X^j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire précédent et on considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X], P(1) = P(2)\}$. Déterminer $F^\perp$ et $F + F^\perp$

3. Déterminer $d(X, F)$

VIII Formes linéaires et vecteur normal

Exercice 68 **(Centrale PSI 2010)** *[Solution]*

On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ et on note δ l'application définie par $\delta(P) = P(0)$.

1. Montrer l'existence d'un unique polynôme Ω de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \delta(P) = (\Omega|P)$. Montrer que $\deg(\Omega) = n$.

2. On se place cette fois dans $\mathbb{R}[X]$

a) Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X], |(Q|P)| \leqslant K\|P\|$.

b) Calculer $\delta\left((1-X)^n\right)$ et $\|(1-X)^n\|$. Le résultat de la question 1 est-il encore valable sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 69 **(Mines-Ponts PSI 2018)** *[Solution]*
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1])$ et $(f_1, \dots, f_n) \in E^n$.

1. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est libre et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe $(g_1, \dots, g_n) \in E^n$ tel que $\forall (i,j), m_{i,j} = \int_0^1 f_i(t)g_j(t)\,\mathrm{d}t$.

indication : utiliser $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ *et la forme linéaire de matrice* $\begin{pmatrix} m_{1,j} & \dots & m_{n,j} \end{pmatrix}$ *dans* $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$.

2. Étudier la réciproque.

Exercice 70 **(Mines-Ponts MP 2006)** *[Solution]*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P(1) = \int_0^1 \dfrac{A(t)P(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$. Peut-on remplacer $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 71 **(Mines-Ponts MP 2009)** *[Solution]*

Pour $n \geqslant 1$, établir l'existence et l'unicité de $P \in \mathbb{R}_n[X]$ unitaire tel que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\int_0^{+\infty} t^k P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = 0$. Que subsiste-t-il de ce résultat lorsque l'on cherche P dans $\mathbb{R}[X]$ (et $k \in \mathbb{N}$) ?

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* $\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}2&2&1&1\\2&2&1&1\\1&1&3&-2\\1&1&-2&3\end{pmatrix}$

Exercice 2 *[sujet]* **1.** $F=\mathrm{Vect}\{(1,0,0,-1),(0,1,-1,0)\}$

2. $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&-1&1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$

3. $d(u,F^\perp)=\|\pi_F(u)\|=0$ car $u\in F^\perp$.

Exercice 3 *[sujet]* **1.** $H=\mathrm{Vect}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_2+e_3),\dfrac{1}{\sqrt{15}}(2e_1-e_2-e_3-3e_4)\right\}$

2. $M=\dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}3&1&1&-2\\1&2&2&1\\1&2&2&1\\-2&1&1&3\end{pmatrix}$.

3. $d(e_1,H)^2=\|e_1\|^2-\|\pi_H(e_1)\|^2=1-\dfrac{3}{5}=\dfrac{2}{5}$

Exercice 4 *[sujet]* Une bon de H est $u=\dfrac{1}{\sqrt{7}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $v=\dfrac{1}{\sqrt{7\times 13}}\begin{pmatrix}1\\-5\\8\\1\end{pmatrix}$ puis $\pi_H(x)=(u|x)u+(v|x)v$, ce qui donnera $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(\pi_H)=\dfrac{1}{13}\begin{pmatrix}2&3&3&2\\3&11&-2&3\\3&-2&11&3\\2&3&3&2\end{pmatrix}$

Exercice 5 *[sujet]* n est unitaire et normal au plan donc $s(u)=u-2(n|u)n$ et $S=\begin{pmatrix}1-2a^2&-2ab&-2ac\\-2ab&1-2b^2&-2bc\\-2ac&-2bc&1-2c^2\end{pmatrix}$.

Exercice 6 *[sujet]* $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}5&2&-1\\2&2&2\\-1&2&5\end{pmatrix}$

Exercice 7 *[sujet]* **1.** $G=\mathrm{Vect}\{\sin,\cos\}$

2. $(\sin\,|\cos)=\displaystyle\int_0^\pi \sin(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin(2t)\,\mathrm{d}t=0$ donc $(\sin,\cos)$ est une base orthogonale de G.

3. On vérifie $\|\sin\|^2=\|\cos\|^2=\dfrac{\pi}{2}$ donc une bon de G est $\left(\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin,\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos\right)$ et on en déduit, pour $x\in[0,\pi]$, $\pi_G(f)(x)=\dfrac{2}{\pi}\left(\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t\sin(x)+\int_0^\pi f(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t\cos(x)\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$

Exercice 8 *[sujet]* **1.** Si $u=a+b$ avec $a\in H$ et $b\perp H$ alors $v=r(u)=a-b$ donc (Pyth) $\|u\|^2=\|a\|^2+\|b\|^2=\|v\|^2$.

2. Si $\|u\|=\|v\|$ alors $(u+v|u-v)=\|u\|^2-\|v\|^2=0$ donc $u=\dfrac{1}{2}(u+v)+\dfrac{1}{2}(u-v)$ avec $u+v\in H=\mathrm{Vect}\{u-v\}^\perp$ et $r_H(u)=\dfrac{1}{2}(u+v)-\dfrac{1}{2}(u-v)=v$

3. On a $\|u\|=\|v\|=\sqrt{3}$ donc il s'agit de la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}\{u-v\}^\perp$: $u-v=(1,0,0,-1)$ puis $r_H(x)=2\pi_H(x)-x=x-2\pi_D(x)$ avec $\pi_D(x)=\dfrac{(u-v|x)}{\|u-v\|^2}(u-v)$ car $\dfrac{u-v}{\|u-v\|}$ est une bon de $D=H^\perp$. On a donc $r_H(x,y,z,t)=2\dfrac{x-t}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(r_H)=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$.

Exercice 9 *[sujet]* **1.** par récurrence on trouve $P_{n+1}=P_n'-2XP_n$ puis $\deg(P_n)=n$

2. si $n<m$ alors $(P_n|P_m)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P_n(t)\phi^{(m)}(t)\,\mathrm{d}t\overset{\text{IPP}}{=}-\int_{-\infty}^{+\infty}P_n'(t)\phi^{(m-1)}(t)\,\mathrm{d}t=\cdots=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty}P_n^{(n)}(t)\phi^{(m-n)}(t)\,\mathrm{d}t=$ $(-1)^nP_n^{(n)}\Big[\phi^{(m-n-1)}(t)\Big]_{-\infty}^{+\infty}=0$ car $P_n^{(n)}$ est constant.

3. Par degrés étagés, $(P_0,\dots,P_{n-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc $P_n\in\mathbb{R}_n[X]^\perp$. Si les racines de P_n où P_n change de signe (donc d'ordres de multiplicité impairs) sont $a_1,\dots,a_m$ avec $m<n$ et si $Q=(X-a_1)\dots(X-a_m)$ (qui change de signe en même temps que P_n) alors $Q\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a $(P_n|Q)=0$ mais $(P_n|Q)=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}P_n(t)Q(t)\phi(t)\,\mathrm{d}t$ ne peut pas être nul car $t\mapsto P_n(t)Q(t)e^{-t^2}$ est continue, de signe fixe et non nulle. On en déduit que P_n change de signe au moins n fois et comme $\deg(P_n)=n$, P_n est bien SARS.

Exercice 10 *[sujet]* **1.** $t_ne^{-t}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ puis $I_n=n!$ par IPP (c'est $\Gamma(n+1)$)

2. facile (penser à l'intégrabilité

3. Avec Leibniz : $L_n(x)=\dfrac{e^x}{n!}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}e^{-x}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}x^k$

4. Si $i\leqslant j$, par IPP, $(L_i|L_j)=\dfrac{1}{j!}\displaystyle\int_0^{+\infty}L_i(t)\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}x^j}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t=\frac{-1}{j!}\int_0^{+\infty}L_i'(t)\frac{\mathrm{d}^{j-1}}{\mathrm{d}x^{j-1}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t=\cdots=$ $\dfrac{(-1)^i}{j!}\displaystyle\int_0^{+\infty}L_i^{(i)}(t)\frac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{j-i}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t$. Si $i<j$ alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}^{j-i}}{\mathrm{d}x^{j-i}}\left(e^{-x}x^j\right)(t)\,\mathrm{d}t=0$ et (si $i=j$), on a $\|L_i\|^2=$ $\dfrac{(-1)^i}{i!}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^i}{i!}\times i!e^{-t}t^i\,\mathrm{d}t=1$.

5. $L_n\in\mathrm{Vect}\{L_0,\dots,L_{n-1}\}^\perp=\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc si on suppose que L_n change de signe en $x_1<\cdots<x_p$ sur $\mathbb{R}^+$ et que $p<n$, on introduit $Q=\displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X-x_i)$ (qui change de signe en même temps que L_n sur $\mathbb{R}^+$, on a $\deg(Q)=p\leqslant n-1$ donc $(Q|L_n)=0$, ce qui est absurde car $(Q|L_n)=\displaystyle\int_0^{+\infty}Q(t=)L_n(t)e^{-}\,\mathrm{d}t$ et $t\mapsto Q(t)L_n(t)e^{-t}$ est de signe fixe, continue et non nulle sur $\mathbb{R}^+$. On a donc $p\geqslant n$. Comme $\deg(L_n)=n$, L_n a au plus n racines donc $p=n$ et toutes ces racines sont simples.

Exercice 11 *[sujet]* Si $(f|f)=0$ alors $f(0)=0$ et $\displaystyle\int_0^1f'(t)^2\,\mathrm{d}t=0$ donc $f'=0$ car $(f')^2$ est $\mathcal{C}^0$ positive ; le reste facile

Exercice 12 *[sujet]* **1.** Si $(f|f)=0$ alors $f(0)=0$ et $\displaystyle\int_{-1}^1f'(t)^2\,\mathrm{d}t=0$ donc (fonction continue positive) $f'=0$ et $f=0$ car $f(0)=0$.

2. Par orthonormalisation de $(1,X,X^2)$ (qui est déjà orthogonale !) on trouve $\left(1,\dfrac{1}{\sqrt2}X,\dfrac{3}{2\sqrt2}X^2\right)$.

Exercice 13 *[sujet]* **1.** Si $(P|P)=0$ alors $P^{(k)}(a)=0$ pour $k\leqslant n$ donc a est racine de P d'ordre $\geqslant n+1$ donc $P=0$; le reste est facile

2. $E=\{1\}^\perp$ est un hyperplan donc $\dim(E)=n$ et $d(1,E)=\|1\|=1$ puisque $1\perp E$

3. $\dfrac{1}{k!}(X-a)^k$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** E sev facile, φ est bijective donc $\dim(E)=4$ puis on a une base en prenant les 4 suites définies par $u_{n+4}=u_n$ avec $u_0,u_1,u_2,u_3=1,0,0,0$ puis $0,1,0,0$, puis $0,0,1,0$ et $0,0,0,1$

2. Si $\phi(u,u)=0$ alors $ku_k-u_{k+1}=0$ pour $k\in[\![1,4]\!]$ ce qui donne $u_1=u_2=u_3=u_4=0$ puis $u=0$ par 4-périodicité

3. On a $\phi(u,v)=\displaystyle\sum_{k=1}^{4}x_ky_k$ (comme le prod scal canonique sur $\mathbb{R}^4$) donc on aura une bon si $(x_1,x_2,x_3,x_4)=E_i$ ($i\in[\![1,4]\!]$, E_i vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$). Reste à résoudre les systèmes $A\begin{pmatrix}u_0\\u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=E_i$ avec $A=$ $\begin{pmatrix}0&1&-1&0\\0&0&2&-1\\-1&0&0&3\\4&-1&0&0\end{pmatrix}$ qui est inversible. Les valeurs de u_i, $i\in[\![0,3]\!]$ définissent la suite par 4-périodicité.

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Cours

2. Si $(P|P)=0$ alors $P(k)+P(1)=0$ pour $k\in[0,3]$ donc $(k=1)$ $P(1)=0$ puis $P(k)=0$ pour $k\in[\![0,3]\!]$ et P possède au moins 4 racines distinctes ; le reste est facile

3. On remarque que (L_0,L_2,L_3) est déjà orthonormée donc il suffit de redresser (puis normer) L_1 ; on trouve $\dfrac{1}{2}(L_1-L_0-L_2-L_3)$

Exercice 16 *[sujet]* On a $B(X,X)=\displaystyle\int_0^1 tP(t)^2\,\mathrm{d}t$ si $P=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1}$ donc $B(X,X)\geqslant 0$ et si $B(X,X)=0$ alors $P(t)=0$ pour $t\in]0,1]$ (XP^2 est continu et positif) donc P a une infinité de racines donc est nul et les x_i sont nuls.

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $(P|P)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|P(e^{it})|^2\,\mathrm{d}t\geqslant 0$ et si $(P|P)=0$ alors (continu positif), $P(e^{it})=0$ si $t\in[0,2\pi]$ donc P admet une infinité de racines (tout le cercle unité).

2. $\|P\|^2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}|P(e^{it})|^2\,\mathrm{d}t\leqslant\dfrac{1}{2\pi}(\sup_{|z|=1}|P(z)|)^2\times 2\pi$ par inégalité de la moyenne. Si $\|P\|=\displaystyle\sup_{|z|=1}|P(z)|=1$, on a égalité dans la majoration précédente, ce qui ne se produit que si $t\mapsto|P(e^{it})|$ est une fonction constante sur $[0,2\pi]$. On a donc $P(z)P\left(\dfrac{1}{z}\right)=\lambda$ si $|z|=1$ puis $z^nP(z)P\left(\dfrac{1}{z}\right)=\lambda z^n$; le polynôme (c'en est un) $X^nP(X)P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ et λX^n sont égaux sur $\{|z|=1\}$ donc sont égaux. Si r est le dégré du terme de plus bas degré de P, le degré de $X^nP(X)P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est $n+(n-r)$; on en déduit $n=r$ donc P est un monôme puis $P=X^n$ (qui est évidemment solution).

3. On a $P=1-\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kX^k$ avec $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k=1$; la base canonique étant orthonormale, on a $\|P\|^2=1+\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2$ et par Cauchy-Schwarz, $1=\displaystyle\sum_{k=1}^n a_k\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}$ donc $\|P\|^2\geqslant 1+\dfrac{1}{n}$ce qui donne le résultat avec la première question.

Exercice 18 *[sujet]* **1.** $P(t)Q(t)e^{-t^2}\underset{t\to\pm\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc $(P|Q)$ existe et si $(P|P)=0$ alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}P(t)^2e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=0$ donc (continu positif) $P(t)=0$ pour tout réel t.

2. fait en cours

3. On vérifie en utilisant le changement de variable $u=-t$ que $(-1)^nP_n(-X)$ est aussi une famille orthogonale de degré n et de coefficient dominant 1 ; par unicité $P_n(X)=(-1)^nP_n(-X)$.

4. fait en cours

Exercice 19 *[sujet]* pour $u\geqslant a$, on a $(f(u)-f(a))^2=\displaystyle\int_a^u f'(t)\,\mathrm{d}t\overset{\mathrm{C-Sch}}{\leqslant}\int_a^u 1\,\mathrm{d}t\times\int_a^u f'(t)^2\,\mathrm{d}t\leqslant(u-a)\int_a^b f'(t)^2\,\mathrm{d}t$ ce qui donne l'inégalité e,n intégrant celle ci pour $u\in[a,b]$.

Si on a égalité alors la dernière inégalité donne $(f(u)-f(a))^2=(u-a)\displaystyle\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t$ donc f est de la forme $f(u)=f(a)+\alpha\sqrt{u-a}$ mais comme $f\in\mathcal{C}^1([a,b])$, on trouve $\alpha=0$ donc f est Cte (récip OK)

Exercice 20 *[sujet]* **1.** $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_0^1 f(t)^{1/2}\times f^{5/2}\,\mathrm{d}t\right)^2\overset{\mathrm{C-Sch}}{\leqslant}\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 f(t)^5\,\mathrm{d}t$. On a égalité dans C-Sch si et seulement si $f^{1/2}$ et $f^{5/2}$ sont liées, ie $f^5=\lambda f$ donc si et seulement si f est constante (car f est positive)

2. On a $f(x)=f(0)+\displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\leqslant x\leqslant 1$ puis $f^5\leqslant f$ donc la question précédente donne $\left(\displaystyle\int_0^1 f(t)^3\,\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\int_0^1 f(t)^5\,\mathrm{d}t\leqslant\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$

Exercice 21 *[sujet]* **1.** Si $(f|f)=0$ alors (continue positive) $f(t)^2+f'(t)^2=0$ pour $t\in[0,1]$ donc $f=0$.

2. Si $f\in V$ et $g\in W$ alors $(f|g)\displaystyle\int_0^1 f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t=\Big[f(t)g'(t)\Big]_0^1=0$.

Pour $f\in E$, on cherche $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que $g(t)=f(t)-\alpha\,\mathrm{ch}(t)-\beta\,\mathrm{sh}(t)$ s'annule en 0 et 1 ; il suffit de prendre $\alpha=f(0)$ et $\beta=\dfrac{1}{\mathrm{sh}(1)}(f(1)-\alpha\,\mathrm{ch}(1))$. On a alors $f(t)=g(t)+\alpha\,\mathrm{ch}(t)+\beta\,\mathrm{sh}(t)$ avec $g\in V$ et $\alpha\,\mathrm{ch}+\beta\,\mathrm{sh}\in W$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** cours

2. Si $u \in F$ et $v \in G$ alors $uv = 0$ donc $(u|v) = 0$ et $F \perp G$. Les deux espaces ne sont pas supplémentaires car si $f \in F + G$ alors $f(0) = 0$ donc la fonction constante 1 est dans E mais pas dans $F + G$.

3. cours.

4. On a $f_n \in F$ donc $< f_n, g >= 0$ et $< f_n, g >= g(0)\displaystyle\int_{-1}^{-1/n} g(t)\,\mathrm{d}t - ng(0)\int_{-1/n}^{0} tg(t)\,\mathrm{d}t$ car $f_n(t) = -ntg(0)$ sur $[-1/n, 0]$. On fait ensuite tendre n vers $+\infty$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{-1/n} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\int_{-1/n}^{0} tg(t)\,\mathrm{d}t = 0$ car $\displaystyle\left|n\int_{-1/n}^{0} tg(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant n\|g\|_\infty \int_{-1/n}^{0} t\,\mathrm{d}t = \frac{\|g\|_\infty}{2n}$.

On a encore $f \in F$ donc $< f, g >= 0$ mais cette fois $< f, g >= \displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g(t)^2\,\mathrm{d}t - g(0)\int_{-1}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} g(t)^2\,\mathrm{d}t$; on en déduit $g(t) = 0$ sur $[-1, 0]$ (g^2 est positive et continue) donc $g \in G$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** $(x|f(y)) = {}^tXAY = -{}^t(AX)Y = -(f(x)|y)$

2. $\det(A) = (-1)^n \det({}^tA) = (-1)^n \det(A)$ donc f n'est pas bijective si n est impair.

3. $\mathrm{Im}(f)$ est stable (donc un tel endo induit existe). On vérifie $\ker(f) \perp \mathrm{Im}(f)$: si $f(x) = 0$ et $y = f(z)$ alors $(x|y) = (x|f(z)) = -(f(x)|z) = 0$ donc $\mathbb{R}^n = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(f)$; l'endomorphisme induit sur $\mathrm{Im}(f)$ est donc bijectif, et reste antisymétrique (prendre une bon adaptée) donc $rg(f)$ est pair.

4. Dans une bon adaptée (si $f \neq 0$ alors $\mathrm{rg}(f) = 2$ forcément), on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}$ avec A' antisymétrique de taille 2.
On a $\mathcal{X}_A = X(X^2 + a^2)$ n donc $\mathcal{X}_A$ n'est scindé que si $a = 0$ donc seul $f = 0$ est DZ

Exercice 24 *[sujet]* **1.** On a $(e_i + e_j) \perp (e_i - e_j)$ si $i \neq j$ donc $(f(e_i) - f(e_j)|f(e_i) + f(e_j)) = 0$ ce qui donne $\|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

2. Avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i)$ donc comme $(f(e_i))$ est une famille orthogonale, par Pythagore, on a $\|f(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mu^2$.

Exercice 25 *[sujet]* **1.** cours

2. si $\mathcal{B} = (u, v, e_3, \dots, e_n)$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} (u|v) & \|v\|^2 \\ -\|u\|^2 & -(u|v) \end{pmatrix}$

3. $\mathcal{X}_\varphi = X^{n-2}[X^2 - (u|v)^2 + \|u\|\|v\|]$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ par C-Sch donc φ n'est pas DZ.

Exercice 26 *[sujet]* **1.** $(f(x + y)|x + y) = (f(x)|y) + (f(y)|x)$

2. $(f(x)|y) = -(f(y)|x)$

3. Soit $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$ alors $\lambda\|x\|^2 = (f(x)|x) = 0$ donc $\lambda = 0$. Si f est DZ alors $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = 0$ et $f = 0$

4. si $x \in \ker(f)$ et $y = f(a) \in \mathrm{Im}(f)$ alors $(x|y) = (x|f(a)) = -(f(x)|a) = 0$ puis th du rang

5. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ car $\mathrm{Im}(f)$ est stable par f. De plus $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r$ et $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$ donc A est inversible et comme $a_{i,j} = (e_i|f(e_j)) = -(e_j|f(e_i)) = -a_{j,i}$ donc $A^T = -A$

Exercice 27 *[sujet]* **1.** Soit $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ et $y \in \ker(u)$, on a $(v(x)|y) = (u|u(y)) = 0$ donc $\mathrm{Im}(v) \subset (\ker(u))^\perp$.
Si $x \in \ker(u)^\perp = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ alors $\forall y \in E, (x|u(y)) = 0$ donc $(v(x)|y) = 0$ pour tout $y \in E$; ce qui donne $v(x) \in E^\perp = \{0\}$ donc $x \in \ker(v)$. On a donc $E = \ker(u) \overset{\perp}{\oplus} \ker(u)^\perp = \mathrm{Im}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)^\perp$.

2. Si $x \in \ker(u + v)$, on a $u(x) = -v(x) \in \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$ donc $u(x) = v(x) = 0$ puis $x \in \ker(u) \cap \ker(v) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(u)^\perp = \{0\}$ (on prouve $\ker(v) = \mathrm{Im}(u)^\perp$ en échangeant u et v dans la preuve de la première question).

Exercice 28 *[sujet]* **1.** Si $\|p(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$ alors, d'après Cauchy-Schwarz, $(x + ty|p(x + ty)) \leqslant \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2$ et $(x + ty|p(x + ty)) = (x + ty|ty)$; on a donc $\|x\|^2 + t(x|y) \geqslant 0$ pour tout réel t, ce qui impose $(x|y) = 0$ (si t tend vers $\pm\infty$). Réciproque : Bessel

2. Si P est la matrice de p dans une bon (e_i) alors $|p_{i,j}| = |(e_i|p(e_j))| \leqslant 1$ par Cauchy-Schwarz donc l'ensemble des projecteurs orthogonaux est borné.
Si (p_n) est une suite de projecteurs orthogonaux qui CV vers f alors $p_n^2 = p_n$ donc $f^2 = f$ (car $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire donc continue) et $\|p_n(x)\| \leqslant \|x\|$ donne $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$ pour tout $x \in E$; f est donc un projecteur orthogonal et l'ensemble des projecteurs orthogonaux est fermé.

Exercice 29 *[sujet]* Pour $n = 1$: $u_i = \alpha_i e$ avec e une bon de E ; on a $(u_1|u_2)(u_1|u_3)(u_2|u_3) = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 \geqslant 0$ donc un des produits scalaires au moins est positif.
On suppose le résultat vrai pour $n + 2$ vecteurs d'un espace préhilbertien de dimension n et soit $(u_1, \ldots, u_{n+3}) \in E^{n+3}$ avec $\dim(E) = n + 1$. Si $u_{n+3} = 0$ alors i qlcque et $j = n + 3$ conviennent. Sinon on pose $H = \mathrm{Vect}\{u_{n+3}\}^\perp$ et $v_i = \pi_H(u_i) = u_i - \dfrac{(u_{n+3}|u_i)}{\|u_{n+3}\|^2}u_{n+3}$; comme $\dim(H) = n$, par HR, il existe $1 \leqslant i \neq j \leqslant n+2$ tels que $(v_i|v_j) \geqslant 0$. Comme $(v_i|v_j) = (u_i|u_j) - \dfrac{(u_{n+3}|u_i)(u_{n+3}|u_j)}{\|u_{n+3}\|^2}$, les 3 produits scalaires ne peuvent pas être négatifs strictement.

Exercice 30 *[sujet]* On vérifie que $E = A\overset{\perp}{\oplus}B\overset{\perp}{\oplus}C$ et si $x = u+v+w$ (décomposition suivant la somme directe précédente), on a $s_C(x) = -u - v + w$, $s_B \circ s_A(x) = s_B(u - v - w) = -u - v + w$ et $s_A \circ s_B(x) = s_A(-u + v - w) = -u - v + w$.

Exercice 31 *[sujet]* **1.** cours

2. fait en cours

3. $\inf\limits_{X\in\mathbb{R}^n}(f(X)) = d(Y, \mathrm{Im}(A))$ est atteinte en un unique point $Y_0 = \pi_{\mathrm{Im}(A)}(Y)$ donc $f(X_0) = d(Y, \mathrm{Im}(A))$ si et seulement si $AX_0 = Y_0$. Par définition du projeté orthogonal, on a $AX_0 = Y_0$ si et seulement si $AX_0 \in \mathrm{Im}(A)$ (évident) et $Y - AX_0 \in \mathrm{Im}(A)^\perp = \ker({}^tA)$ donc si et seulement si ${}^tA(Y - AX_0) = 0$.

Exercice 32 *[sujet]* **1.** Cours

2. Cours

3. On a $n = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \leqslant \left|\sum_{i=1}^n x_i\right| \overset{\text{C−Sch}}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n 1^2\right)^{1/2} = n$ donc $(x_1, \ldots, x_n) = \lambda(1, \ldots, 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (à cause de la première égalité) ; on en déduit $x_i = 1$ pour tout i ; récip OK

Exercice 33 *[sujet]* **1.** Si C_i sont les colonnes de M, comme $\mathcal{B}$ est une bon, on a $(u_i|u_j) = {}^tC_iC_j$ donc $G = {}^tMM$ et $\det(G) = (\det(M))^2 \geqslant 0$. De plus $\det(G) = 0$ si et seulement si $\det(M) = 0$ donc si et seulement si $M \notin \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ ce qui équivaut à (u_i) liée.

2. On introduit $\mathcal{B}_p = (e_1, \ldots, e_r)$ une bon de $\mathrm{Vect}\{u_1, \ldots, u_p\}$ que l'on complète en une bon $\mathcal{B} = (e_i)_{i\leqslant n}$ de E. La famille $(u_1, \ldots, u_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement si $(u_1, \ldots, u_p)$ est libre ; on peut lui appliquer la première question : on a $G = \begin{pmatrix} G_p & 0 \\ 0 & I_{n-p} \end{pmatrix}$ où $G_p = ((u_i|u_j))_{i,j\leqslant p}$ donc $\det(G_p) = \det(G) \geqslant 0$. De plus $\det(G_p) = 0$ si et seulement si $\det(G) = 0$ donc si et seulement si $(u_1, \ldots, u_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ est liée, ce qui équivaut à $(u_1, \ldots, u_p)$ est liée.

Exercice 34 *[sujet]* On a $d^2 = \|x_i - x_j\|^2 = \|x_i\|^2 - 2(x_i|x_j) + \|x_j\|^2 = 2 - 2(x_i|x_j)$ donc $(x_i|x - j) = 1 - \dfrac{d}{2}$. Soit $G \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice de coeff $(x_i|x_j)$, (x_i) est liée (car $p > n$), donc il existe j tel que $x_j = \displaystyle\sum_{i\neq j}\alpha_i x_i$; on vérifie alors que $C_j = \displaystyle\sum_{i\neq j}\alpha_i C_i$ (colonnes de G) donc G n'est pas inversible. On vérifie que $G^2 - \left(d - p + p\dfrac{d}{2}\right)G + \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{d}{2}(1-p) + p\right)I_p = 0$ donc $\dfrac{d}{2}\left(\dfrac{d}{2}(1-p) + p\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{d}{2}(1-p) + p = 0$ $(*)$ (sinon on calcule l'inverse avec ce polynôme annulateur dont le coeff constant est non nul). On en déduit que la matrice $G' = ((x_i|x_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p-1}$ qui est de la même forme est inversible (car $p - 1$ ne vérifie plus $(*)$) ; la famille $x_1, \ldots, x_{p-1}$ est donc libre et $p - 1 \leqslant n$ donc $n = p + 1$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** facile

2. La famille est orthogonale, formée de vecteurs non nuls, donc libre et $p \leqslant \dim(E \times \mathbb{R}) = n + 1$.

Exercice 36 *[sujet]* On a $1 = \|e_i\|^2 = \|e_i\|^4 + \displaystyle\sum_{j\neq 1}(e_j|e_i)^2$ donc $(e_j|e_i) = 0$ (somme de termes positifs qui est nulle) ; la famille est orthonormale. Si $x \in \mathrm{Vect}\{e_i\}^\perp$ alors $\|x\|^2 = 0$ donc $\mathrm{Vect}\{e_i\}^\perp = \{0\}$ et $E = \mathrm{Vect}\{e_i\}$ donc c'est une bon.

Exercice 37 *[sujet]* Par identité de polarisation $(x|y) = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^n (e_i|x)(e_i|y) = \left(\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \,\middle|\, y\right)$.
Pour $x \in E$, on a $\left(x - \displaystyle\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \,\middle|\, y\right) = 0$ pour tout $y \in E$ donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^n (e_i|x)e_i \in \mathrm{Vect}\{e_i\}$; (e_i) est donc une base de E. Enfin, $e_j = \displaystyle\sum_{i=1}^n (e_i|e_j)e_i$ donne $(e_i|e_j) = \delta_{ij}$ en identifiant les coefficients dans cette égalité (la famille est libre).

Exercice 38 *[sujet]* **1.** $\|e_i\|^2 - \|e_i\|^4 = \sum_{j\neq i}(e_j|e_i)^2 \geqslant 0$ donc $\|e_i\| \leqslant 1$.

2. La liberté donne l'existence d'un tel x : E est de dimension au moins égale à n (ou infinie). On a $1 = \|x\|^2 = (e_n|x)^2$ puis par C-Sch $1 = (e_n|x)^2 \leqslant \|e_n\|^2\|x\|^2 = \|e_n\|^2$ donc $\|e_n\| \geqslant 1$ puis $\|e_n\| = 1$.

3. On trouve de même $\|e_i\| = 1$ donc avec l'égalité de a), il reste $\sum_{j\neq i}(e_j|e_i)^2 = 0$ donc $(e_j|e_i) = 0$ (somme de termes positifs nulle) donc (e_i) est orthonormale puis une base car si $E \neq \mathrm{Vect}\{e_i\}$, on prend $x \in \mathrm{Vect}\{e_i\}^\perp \setminus \{0\}$ et on a $\|x\|^2 = 0$ ce qui est absurde.

Exercice 39 *[sujet]* Si $x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}^\perp$ alors $\|x\|^2 = 0$ donc $E = \mathrm{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$ et $\dim(E) = n$. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est donc une base de E et on peut alors utiliser l'exercice précédent (avec une famille libre).

Exercice 40 *[sujet]* **1.** Cours

2. $(1, \sqrt{3}(2X-1))$

3. On cherche $d(X^2, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|X^2\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2)\|^2 = \frac{1}{5} - < 1, X^2 >^2 - < \sqrt{3}(2X-1), X^2 >^2 = \frac{1}{180}$

Exercice 41 *[sujet]* **1.** cours

2. Comme $\int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t = (P|1)$ et $\|1\|^2 = 2$, il s'agit du cas d'égalité dans C-Schw : les solutions sont les P tels que $(1, P)$ est liée donc les polynômes constants.

3. Facile puis $\mathrm{Vect}\{P_0, P_1, P_2\} = \mathbb{R}_2[X]$

4. $\pi_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3) = \frac{(P_0|X^3)}{\|P_0\|^2}P_0 + \frac{(P_1|X^3)}{\|P_1\|^2}P_1 + \frac{(P_2|X^3)}{\|P_2\|^2}P_2 = \dots$ puis comme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ unitaire s'écrit $X^3 - aX^2 - bX - c$,

$I = d(X^3, R_2[X])^2 = \|X^3 - \pi_{\mathbb{R}_2[X]}(X^3)\|^2 = \|X^3\|^2 - \left(\frac{(P_0|X^3)}{\|P_0\|^2}\right)^2 - \left(\frac{(P_1|X^3)}{\|P_1\|^2}\right)^2 - \left(\frac{(P_2|X^3)}{\|P_2\|^2}\right)^2$

Exercice 42 *[sujet]* **1.** cours

2. On orthonormalise (X, X^2) : on trouve $\left(\sqrt{3}X, 2\sqrt{\frac{10}{3}}\left(X^2 - \frac{3}{4}X\right)\right)$

3. La distance est minimale ssi $aX + bX^2 = -\pi_F(1) = -3(X|1)X - \frac{40}{3}\left(X^2 - \frac{3}{4}X\middle|1\right)\left(X^2 - \frac{3}{4}X\right) = \frac{5}{9}X^2 - \frac{23}{12}X$.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $(\cos|\sin) = 0$, $\|cos\| = \|\sin\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $(id|\cos) = -2$ et $(id|\sin) = \pi$

2. Une bon de $F = \mathrm{Vect}\{\sin, \cos\}$ est $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\right)$ donc $\pi_F(id) = \frac{2}{\pi}(\cos|id)\cos + \frac{2}{\pi}(\sin|id)\sin = \frac{2}{\pi} - (2\cos + \pi\sin)$.

3. On cherche $d(id, F)^2 = \|id - \pi_F(id)\|^2 = \|id\|^2 - \|\pi_F(id)\|^2 = \frac{\pi^3}{3} - \frac{4}{\pi^2}(4 + \pi^2)$.

Exercice 44 *[sujet]* **1.** $P(t)Q(t)\ln(t) \underset{t\to 0}{=} O(\ln(t))$, le reste est facile.

2. On vérifie (IPP) $\varphi(X^k, X^h) = \int_0^1 t^{h+k}\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(1+h+k)^2}$ puis une bon de $\mathbb{R}_2[X]$ est $\left(1, \frac{3}{\sqrt{7}}(4X-1), \dots\right)$ et $\pi_{\mathbb{R}_3[x]} = \dots$ beurk !

Exercice 45 *[sujet]* **1.** Facile

2. $\int_0^1 (t^3 - t)P'(t)\,\mathrm{d}t \overset{\mathrm{IPP}}{=} -\int_0^1 (3t^2-1)P(t)\,\mathrm{d}t$ donc $F = \mathrm{Vect}\{3X^2 - X - 1\}^\perp$ puis $d(Q, F) = \|\pi_{F^\perp}(Q)\| = \frac{|(3X^2 - X - 1|Q)|}{\|3X^2 - X - 1\|}$

Exercice 46 *[sujet]* **1.** $P \in W \Leftrightarrow P = (X^2-1)(aX+b)$ donc $W = \mathrm{Vect}\{(X^2-1), X(X^2-1)\}$ est de dimension 2 car les deux polynômes sont libres.

2. La base canonique étant orthonormale, $(P|Q) = \sum_{i=0}^{3} p_i q_i$ (les coeff) ; une bon de W est donc $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X^2-1)\frac{1}{\sqrt{2}}X(X^2-1)\right)$ donc $\pi_W(P) = \frac{1}{2}(X^2 - 1|P)(X^2-1) + \frac{1}{2}(X(X^2-1)|P)X(X^2-1)$.

Exercice 47 *[sujet]* **1.** $P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k$ donc $H_0 = \{1 + X + \cdots + X^n\}^\perp$ (hyperplan)

2. $P \in H_1$ si et seulement si $P = 1 - Q$ avec $Q \in H_0$. On demande donc $d(1, H_0) = \|\pi_{H_0^\perp}(1)\| = \dfrac{|(1|1 + \cdots + X^n)|}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$

Exercice 48 *[sujet]* **1.** Si $(P|P) = 0$ alors $P(i) = 0$ pour $i \in [\![0, n]\!]$; P a au moins $(n+1)$ racines distinctes donc est nul.

2. $V_0 = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. La famille des polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $0, 1, \ldots, n$ est donc une bon de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $V_0 = \mathrm{Vect}\{L_0, L_2, \ldots, L_n\} = \mathrm{Vect}\{L_1\}^\perp$.

3. $\left(\inf_{P \in V_1} \|P\|\right)^2 = d(1, V_0)^2 = \|1 - \pi_{V_0}(1)\|^2 = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{L_1\}}(1)\|^2 = (L_1|1)^2 = 1.$

Exercice 49 *[sujet]* **1.** Si $(P|P) = 0$ alors $[\![0, n]\!]$ sont $(n+1)$ racines distinctes de P donc $P = 0$.

2. $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in H_n$ si et seulement si $\sum_{k=0}^{n} a_k \dfrac{1 + (-1)^k}{k+1} = 0$; $H_n = \ker(\varphi)$ où $\varphi : P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)\,\mathrm{d}t$ est une forme linéaire non nulle ($\varphi(1) = 2$) donc H_n est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(H_n) = n$.

3. $H_2 = \mathrm{Vect}\{X, 3X^2 - 1\}$; il suffit que A_2 soit un vecteur normal à H_2 : si $P = a + bX + cX^2$ alors $\begin{cases} (P|X) = 0 \\ (P|3X^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} 3a + 5b + 9c = 0 \\ 6a + 12b + 23c = 0 \end{cases}$ donc $A_2 = 6X^2 - 15X + 7$ convient.

$d(X^2|H_2) = \|\pi_{\mathrm{Vect}(A_2)}(X^2)\| = \dfrac{|(X^2|A_2)|}{\|A_2\|^2} = \dfrac{1}{27}.$

Exercice 50 *[sujet]* **1.** On vérifie que $(P, Q) \mapsto (P|Q)$ est toujours bilinéaire symétrique positive. Si les a_i sont 2 à 2 distincts et si $(P|P) = 0$ alors $P(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ donc P a $(n+1)$ racines distinctes donc est nul est $(\,|\,)$ est un produit scalaire. Dans le cas contraire, si $a_0 = a_1$ par exemple, $P = \prod_{k=1}^{n} (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $P \neq 0$ et $(P|P) = 0$ donc $(\,|\,)$ n'est pas un produit scalaire.

2. On a $F = \mathrm{Vect}\{1\}^\perp$ donc $d(X^n, F) = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{1\}}(X^n)\| = \dfrac{|(1|X^n)|}{\|1\|^2} = \dfrac{1}{n} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|.$

Exercice 51 *[sujet]* **1.** Si $(P|P) = 0$ alors $P(a_i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ donc P a $(n+1)$ racines distinctes donc est nul est $(\,|\,)$ est un produit scalaire.

2. On a $F = \mathrm{Vect}\{1\}^\perp$ donc $\dim(F) = n$ et $d(X^n, F) = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{1\}}(X^n)\| = \dfrac{|(1|X^n)|}{\|1\|^2} = \dfrac{1}{n} \left|\sum_{k=0}^{n} a_k^n\right|.$

Exercice 52 *[sujet]* **1.** Si $(P|P) = 0$ alors $P^{(k)}(1) = 0$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ donc 1 est racine de P d'ordre $\geqslant n + 1$ donc $P = 0$.

2. $E = \mathrm{Vect}\{1\}^\perp$ est un hyperplan (donc $\dim(E) = n$) donc $d(X^k, E) = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{1\}}(X^k)\| = \dfrac{|(1|X^k)|}{\|1\|^2} = 1.$

Exercice 53 *[sujet]* On a $F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^{n} p_k = 0\right\} = \mathrm{Vect}\{Q\}^\perp$ avec $Q = 1 + X + \cdots + X^n$; on en déduit $\pi_F(1) = 1 - \dfrac{(1|Q)}{\|Q\|^2} Q$ avec $(1|Q) = 1$ et $\|Q\|^2 = n + 1$.

Exercice 54 *[sujet]* **1.** Cours

2. F est un hyperplan de $\mathbb{R}_2[X]$ dont une base est $(1, X^2)$. On décompose P en $P = (1 + X^2) + X$ et on vérifie $(X|1) = (X|X^2) = 0$ donc $1 + X^2 \in F$ et $X \in F^\perp$ donc $\pi_F(P) = X$.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** facile

2. attention au cas $n = 0$: $t^n \ln t \underset{0}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ et $I_n \overset{\mathrm{IPP}}{=} \dfrac{-1}{(n+1)^2}$

3. facile : trouver une bon (f_0, f_1) de F puis $\pi_F(g) = (f_0|g) f_0 + (f_1|g) f_1$

4. c'est $d(g, F)^2 = \|g\|^2 - (f_0 - g)^2 - (f_1|g)^2$

Exercice 56 *[sujet]* On pose $f(t) = t\ln(t)$ (prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$) et on munit $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ du produit scalaire $(u|v) = \displaystyle\int_0^1 u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$. On a $\min\limits_{a,b} I_{a,b} = d(f, \mathbb{R}_1[X])^2$. Une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(1, \sqrt{3}(2X-1))$ donc $\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = (1|f)1 + 3(2X-1|f)(2X-1) = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{12}(2X-1)$ donc $\min\limits_{a,b} I_{a,b} = \|f - \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \dfrac{2}{9} - \dfrac{1}{16} - \dfrac{3}{144}$ est atteint si et seulement si $a = -\dfrac{1}{6}$ et $b = -\dfrac{1}{6}$.

Exercice 57 *[sujet]* On munit $\mathcal{C}^0([1,e],\mathbb{R})$ de $(u|v) = \displaystyle\int_1^e u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ et on cherche $d(\ln, \mathbb{R}_1[X])^2$: une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $\left(\dfrac{1}{e-1}, \dfrac{2\sqrt{3}}{(e-1)^{3/2}}\left(X - \dfrac{e+1}{2}\right)\right)$ donc $\pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f) = \dfrac{1}{e-1}(1|f)1 + \dfrac{12}{(e-1)^3}\left(X - \dfrac{e+1}{2}\middle| f\right)\left(X - \dfrac{e+1}{2}\right)$ et $d(f, \mathbb{R}_1[X])^2 = \|f - \pi_{\mathbb{R}_1[X]}(f)\|^2 = \|f\|^2 - \|\pi_{\mathbb{R}_1[X]}\|^2 = \dots$

Exercice 58 *[sujet]* On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ qui existe car $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ pour $t \geqslant 0$ donc P a une infinité de racines donc $P = 0$.
On cherche $d(X,F)^2$ où $F = \mathrm{Vect}\{1, X^2\}$; une bon de F est $\left(1, \dfrac{1}{2\sqrt{5}}(X^2-2)\right)$ donc $\pi_F(X) = (1|X)1 + \dfrac{1}{20}(X^2 - 2|X)(X^2-2) = 1 + \dfrac{1}{5}(X^2-2)$ et $d(X,F)^2 = \|X - \pi_F(X)\|^2 = \|X\|^2 - \|\pi_F(X)\|^2 = 2 - \left(1 + \dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{1}{5}$.

Exercice 59 *[sujet]*
1. On cherche $d(\ln, \mathbb{R}_1[x])^2$ pour le produit scalaire $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ sur $E = \mathrm{Vect}\{\ln, 1, id\}$; une bon de $\mathbb{R}_1[X]$ est $(\sqrt{3}, \sqrt{5}(4X-3))$ puis $d^2 = \|\ln\|^2 - 3(1|\ln)^2 - 5(4X-3|\ln)^2 = \dots$
2. Si $a = \alpha + i\beta$ et $b = \alpha' + i\beta'$ alors $\displaystyle\int_0^1 x^2|\ln(x) - ax - b|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2|\ln(x) - \alpha x - \alpha'|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^1 x^2|\beta x + \beta'|^2\,\mathrm{d}x \geqslant d^2$ donc la borne inf dans $\mathbb{C}^2$ est la même que dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 60 *[sujet]*
1. $\dfrac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to1}{=} O\left(\dfrac{1}{(1-t)^{1/2}}\right)$ (idem en -1) donc $\phi(f,g)$ existe ; le reste est facile
2. $\|\arcsin\|^2 = \left[\dfrac{1}{3}\arcsin(t)^3\right]_{-1}^1 = \dfrac{\pi^3}{24}$
3. C'est $d(\arcsin, \mathbb{R}_1[X])^2$ et $P_0 = \dfrac{1}{\pi}$, $P_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}X$ est une bon de $\mathbb{R}_1[X]$,...

Exercice 61 *[sujet]*
1. cours (produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
2. $H = \mathrm{Vect}\{J\}^\perp$ où J est la matrice dont tous les coefficients valent 1 et $d = d(A,H)^2 = \|\pi_{H^\perp}(A)\|^2 = \dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{(i,j)} a_{i,j}\right)^2$

Exercice 62 *[sujet]*
1. cours
2. Si $A = {}^tA$ et $B = -{}^tB$ $(A|B) = \mathrm{Tr}(AB) = -\mathrm{Tr}(A\,{}^tB) = -\mathrm{Tr}({}^tBA) = -(B|A) = -(A|B)$
3. $M = \dfrac{1}{2}(M + {}^tM) + \dfrac{1}{2}(M - {}^tM)$ est la décomposition de M donc $d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \left\|\dfrac{1}{2}(M - {}^tM)\right\| = \sqrt{\dfrac{1}{2}\mathrm{Tr}({}^tMM - M^2)}$
4. $H = \ker(\mathrm{Tr})$ est le noyau d'une forme linéaire non nulle donc un hyperplan et $dim(H) = n^2 - 1$. Comme $H = \mathrm{Vect}\{I_n\}^\perp$, on a $d(J,H) = \|\pi_{\mathrm{Vect}\{I_n\}}(J)\| = \dfrac{|(I_n|J)|}{\|I_n\|^2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 63 *[sujet]*
1. cours
2. facile
3. Si M est la seconde matrice, une bon de $F = \mathrm{Vect}\{I_3, M\}$ est donc $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}I_3, \dfrac{1}{\sqrt{3}}M\right)$ et $\pi_F(A) = \dfrac{1}{3}(I_3|A)I_3 + \dfrac{1}{3}(M|A)M = I_3 + \dfrac{1}{3}M$.

Exercice 64 *[sujet]*
1. cours
2. $F = \mathrm{Vect}\{I_2, A\}$ avec $A = E_{1,2} - E_{2,1}$; $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in F^\perp$ si et seulement si $(I_2|M) = (A|M) = 0 \Leftrightarrow a + d = b - c = 0$ donc $F^\perp = \mathrm{Vect}\{C, D\}$ avec $C = E_{1,1} - E_{2,2}$ et $D = E_{1,2} + E_{2,1}$ et une bon de $F^\perp$ est $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}C, \dfrac{1}{\sqrt{2}}D\right)$

3. $d(J,F^\perp)^2 = \|\pi_F(J)\|^2 = \frac{1}{2}(I_2|J)^2 + \frac{1}{2}(A|J)^2$ car $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}I_2, \frac{1}{\sqrt{2}}A\right)$ est une bon de F. On trouve $d(J,F^\perp) = 4$.

Exercice 65 *[sujet]* **1.** $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^+$; P a une infinité de racines donc $P = 0$.

2. $1 = \|P_k\|^2 \overset{\text{IPP}}{=} P_k(0)^k + 2(P_k|P_k') = P_k(0)^2$ car $P_k' \in \mathrm{Vect}\{P_0,\dots,P_{k-1}\}^\perp = \mathrm{Vect}\{1,\dots,X^{k-1}\}^\perp = \mathbb{R}_{k-1}[X]^\perp$ et $\deg(P_k') \leqslant k-1$ car $\deg(P_k) = k$ donc $(P_k|P_k') = 0$.

3. Si on suppose $P_k(0) = 1$ (possible quitte à remplacer P_k par $-P_k$), on a $P = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k \in F$ ssi $\sum_{k=0}^{n} a_k = 0$ (éq cartésienne d'un hyperplan) donc $F = \mathrm{Vect}\{Q\}^\perp$ avec $Q = P_0 + P_1 + \cdots + P_n$. On a alors $d(1,F)^2 = \|\pi_{F^\perp}(1)\|^2 = \frac{(Q|1)}{\|Q\|^2}$ puis, comme $(P_0,\dots,P_n)$ est une bon, $\|Q\|^2 = n+1$ et $(Q|1) = \sum_{k=0}^{n}(P_k|1) = (P_0|1) = 1$ car on vérifie $\|1\| = 1$ donc $P_0 = 1$.

Exercice 66 *[sujet]* **1.** $A(t)B(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif) $P(t) = 0$ si $t \in \mathbb{R}^+$; P a une infinité de racines donc $P = 0$. $< X^k, X^h >= (k+h)!$ par IPP successives.

2. $Q \in F$

3. $< 1-Q, X^i >= i! - \sum_{k=1}^{n} a_k(k+i)! = i!P(i)$ et si $i \in [\![1,n]\!]$, $X^i \in F$ donc $1 - Q \perp X^i$ donne $P(i) = 0$.

4. On cherche $d(1,F)^2 = \|1-Q\|^2 =< 1-Q, 1-Q >=< 1, 1-Q > - < Q, 1-Q >=< 1, 1-Q >= P(0)$. On sait que $\deg(P) = n$ et que $1,\dots,n$ sont des racines de P donc $P = \alpha\prod_{k=1}^{n}(X-k)$. De plus $P(-1) = 1 = (-1)^n\alpha(n+1)!$ donc $\alpha = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$ et $P(0) = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 67 *[sujet]* **1.** Si $P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} q_k X^k$ (avec $n \geqslant \deg(P)$ et $n \geqslant \deg(Q)$) alors $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k$ donc unicité si existence et $(P|Q) = \sum_{k=0}^{n} p_k q_k$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

2. si $P = \sum_{k=0}^{d} p_k X^k \in F^\perp$ alors $(P|1) = 0$ car $1 \in F$ et $(P|1) = p_0$ donc $p_0 = 0$. De même, $Q_k = (2^{d+1}-1)X^k - (2^k - 1)X^{d+1} \in F$ donc $(P|Q_k) = 0$ et, si $k \leqslant d$, on a $(P|Q_k) = (2^{d+1}-1)p_k$ donc $p_k = 0$ et $P = 0$. On en déduit $F^\perp = \{0\}$. Puis $F \oplus F^\perp = F \neq \mathbb{R}[X]$

3. Comme $F \oplus F^\perp \neq \mathbb{R}[X]$, on ne peut pas introduire de projection orthogonale sur F et on doit utiliser $d(X,F) = \inf_{P\in F}\|X - P\|$ seulement. Si $Q_n = X - \frac{X^n}{2^n - 1}$ alors $Q_n \in F$ donc $d(X,F) \leqslant \|X - Q_n\| = \frac{1}{2^n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $d(X,F) = 0$
on en déduirait $X \in \overline{F}$ mais pourtant $X \notin F$ car $F \neq \overline{F}$, ie F n'est pas fermé

Exercice 68 *[sujet]* **1.** Existence et unicité : cours (δ est une forme linéaire). Si $\deg(\Omega) \leqslant n-1$ on aurait $(\Omega|X\Omega) = (X\Omega)(0) = 0$ (car $X\Omega \in \mathbb{R}_n[X]$), ce qui est absurde puisque $(\Omega|X\Omega) = \int_0^1 t\Omega(t)^2\,\mathrm{d}t$ est l'intégrale d'une fonction continue positive et non nulle ($\Omega \neq 0$ sinon on aurait $\delta = 0$, ce qui n'est pas le cas puisque $\delta(1) = 1$).

2. a) Par Cauchy-Schwarz avec $K = \|\Omega\|$.

b) $\delta((1-X)^n) = 1$ et $\|(1-X)^n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Si Ω existait, on aurait $|\delta((1-X)^n)| \leqslant K\|(1-X)^n\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $1\frac{K}{\sqrt{2n+1}}$ ce qui est absurde (mais $\mathbb{R}[X]$ n'est plus de dimension finie).

Exercice 69 *[sujet]* **1.** Soit φ_j la forme linéaire telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_j) = {}^tC_j$; il existe $g_j \in \mathrm{Vect}\{f_1,\dots,f_n\} = F$ telle que $\forall f \in F, \varphi_j(f) = (g_j|f)$. Par définition de la matrice de cette forme linéaire dans $\mathcal{B}$, on a $m_{i,j} = \varphi_j(f_i) = (g_j|f_i)$.

2. IL suffit d'utiliser $M = I_n$: il existe une famille $(g_1,\dots,g_n)$ telle que $\forall(i,j), (f_i|g_j) = \delta_{i,j}$. Si $\sum \alpha_i f_i = 0$ alors, pour tout j, on a $0 = \sum \alpha_i(f_i|g_j) = \alpha_j$ donc la famille est libre.

Exercice 70 *[sujet]* On vérifie que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $\dfrac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} \underset{t\to 1}{=} O\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ donc l'intégrale existe ; si $(P|P) = 0$ alors (continu positif), $P(t) = 0$ sur $[0, 1[$ donc P possède une infinité de racines et $P = 0$.
$P \mapsto P(1)$ est une forme linéaire donc l'existence et l'unicité de A est du cours puisque $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie.
Dans $\mathbb{R}[X]$, si A existait, on aurait (avec $P = (1 - X^2)^n$, pour $n \geqslant 1$) $1 = \displaystyle\int_0^1 A(t)\sqrt{1-t^2}(1-t^2)^{n-1}\,\mathrm{d}t$; comme $t \mapsto A(t)\sqrt{1-t^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$, il existe K tel que $\forall t \in [0,1], |A(t)\sqrt{1-t^2}| \leqslant K$, ce qui donne $1 \leqslant K \displaystyle\int_0^1 |1-t^2|^{n-1}\,\mathrm{d}t$. En posant $t = \cos\theta$, on a $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1}\theta\,\mathrm{d}\theta = w_{2n-1}$ (intégrales de Wallis) et comme on a démontré que (w_n) tend vers 0, $1 \leqslant K w_{2n-1}$ est absurde.

Exercice 71 *[sujet]* On vérifie que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$: $P(t)Q(t)e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ donc l'intégrale existe et si $(P|P) = 0$ alors (continu positif), $P(t) = 0$ sur $\mathbb{R}^+$ donc P a une infinité de racines et $P = 0$.
On cherche donc l'existence et l'unicité d'un polynôme P unitaire tel que $P \in \mathbb{R}_n[X] \cap \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$; cet ensemble étant une droite, l'existence de P est assurée (et il suffit de le diviser par son coeff dominant pour le rendre unitaire). Si Q est un autre tel polynôme, $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ puisqu'ils sont tous deux de degré n et unitaires ; on a donc $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$ puis $P = Q$.
L'unicité subsisterait si P existait mais si P existait, on aurait $(P|P) = 0$ donc $P = 0$ ce qui est absurde.