(A)

(1a) $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}'$ $\qquad \vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

(1b) VÉRIFIER VOUS-MÊMES : $\vec{E}' = \vec{E}$ $\quad \vec{B}'' = \vec{B}$

↳ SI ON A UNE SOLUTION $(\vec{A}', V)$, ON EN A UN NBRE INFINI.

(1c)

$$\text{div}(\vec{A}') + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} = \text{div}\,\vec{A}' + \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) + \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \left(-\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right)\right) = 0$$

$$= \underbrace{\text{div}\,\vec{A}' + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}}_{=0} + \underbrace{\Delta f - \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}}_{=0} = 0$$

↳ f vérifie l'équation d'onde avec la vitesse de propagation $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$

(2a) (MA) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ $\qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}\left(-\overrightarrow{\text{grad}}\,V\right) - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right)$

D'où : $\qquad \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}$

↳ $\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}') - \Delta\vec{A} = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial V}{\partial t}\right) - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$

S'ÉLIMINENT.

$$\boxed{\Delta\vec{A}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}}$$

(2b) $\text{div}\,\vec{E}' = 0. \Rightarrow \text{div}\left(-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}\,V\right) = 0.$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{A}')}_{-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t}\right)} + \underbrace{\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,V)}_{\Delta V} = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta V = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}$$

(2c) DÉJÀ FAIT EN COURS. J'EN FAIS UNE :

(MF) $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \underbrace{\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E})}_{\underbrace{\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}')}_{=0} - \Delta\vec{E}} = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})$

(MA) $\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\vec{E}' = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}}$$

(2d) SI ON ADOPTE LA JAUGE DE LORENTZ, LES CHAMPS $V, \vec{A}', \vec{E}, \vec{B}$ SONT DES SOLUTIONS DE L'ÉQUATION D'ONDE EN-DEHORS DES SOURCES, DONC DES ONDES. MAINTENANT, ON ENVOIE LES THÉORICIENS CHERCHER DES SOLUTIONS D'UNE UNIQUE EDP.

EXERCICE B

$$\vec{E} = E_0 \left[\cos(\omega t - kz) \; ; \sin(\omega t - kz) \; ; \; 0 \right]$$

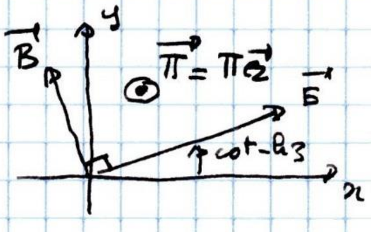
$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} \left[-\sin(\omega t - kz) \; ; \cos(\omega t - kz) \; ; \; 0 \right]$$

⑤

$$\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \vec{e_z}$$

→ Π CONSTANT

L'ENERGIE SE PROPAGE SELON LES z croissants



⑥

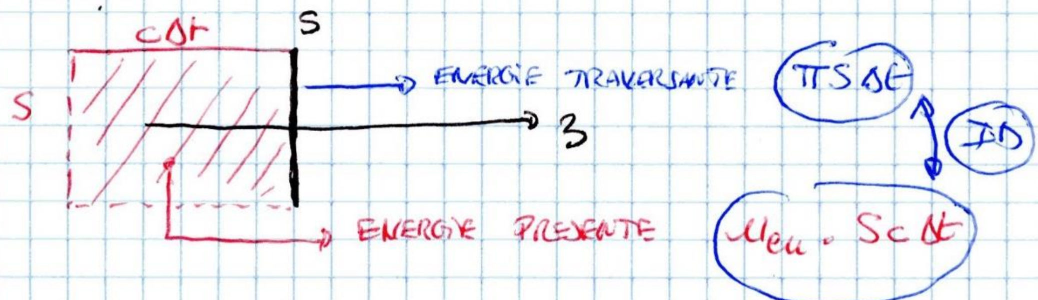
$$u_e = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} = \frac{E_0^2}{2 \mu_0 c^2}$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} = u_e$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{em} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2}}$$

ON REMARQUE ALORS QUE : $\boxed{u_{em} \cdot c = \Pi}$

INTERPRETATION : c : VITESSE DE PROPAGATION DE L'ENERGIE.



↳ $\boxed{\text{L'ENERGIE TRAVERSE S À LA VITESSE c}}$

EXERCICE C

③ $$u_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4} = \frac{Q^2 \sin^2(\omega t)}{2\pi^2 \varepsilon_0 a^4}$$

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 r^2 \omega^2 Q^2 \cos^2(\omega t)}{8\pi^2 a^4}$$

D'OÙ VALEURS MOYENNES TEMPORELLES : $\left(\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \right)$

$\hookrightarrow$ $$\langle u_e \rangle = \frac{Q^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 a^4} \qquad \langle u_m \rangle = \frac{\mu_0 r^2 \omega^2 Q^2}{16\pi^2 a^4}$$

$\hookrightarrow$ $$\boxed{\frac{\langle u_m \rangle}{\langle u_e \rangle} = \left(\frac{r\omega}{2c}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a\omega}{2c}\right)^2}$$

$\hookrightarrow \sim 10^{-5}$

avec $a \sim 0{,}1\,m$ $\omega \sim 10^7\,s^{-1}$

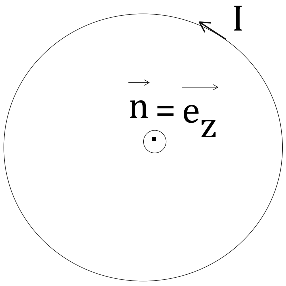
$(f \sim MHz)$

ELECTRONIQUE BASSE FREQUENCES HABITUELLE

$\hookrightarrow$ EN ELECTRONIQUE USUELLE, L'ENERGIE STOCKÉE DANS UN CONDENSATEUR EST PRATIQUEMENT ENTIÈREMENT D'ORIGINE ELECTRIQUE

D.Proposition de solution.

Partie préliminaire



Le dessin ci-dessus est absolument nécessaire. A l'extérieur du solénoïde, le champ magnétique est nul. A l'intérieur, il vaut : $\vec{B} = \mu_o nI\, \vec{e}_z$ et il est uniforme.
Les expressions des énergie magnétique et électrique volumiques sont :

$$u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_o} \quad et \quad u_{elec} = \frac{\varepsilon_o E^2}{2}$$

En coordonnées cylindriques, le rotationnel du vecteur $\vec{A}\,(A_r, A_\theta, A_z)$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_z$$

Partie I. Inductance d'une bobine.

1)En convention récepteur, la tension aux bornes du solénoïde est $u = L\frac{di}{dt}$ et la puissance reçue par le solénoïde est donc :

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = i.L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Li^2}{2} = W_L\right)$$

Si on fait passer le courant depuis la valeur nulle jusqu'à une valeur finale i, le solénoïde reçoit l'énergie $\frac{Li^2}{2}$, énergie que le solénoïde cèdera à l'extérieur quand on fera l'opération inverse.

2)Le volume intérieur du solénoïde est $V = S \cdot \ell$, la densité volumique d'énergie est: $u_{mag} = \frac{B^2}{2\mu_o} = \frac{(\mu_o ni)^2}{2\mu_o} = \frac{\left(\mu_o \frac{N}{\ell} i\right)^2}{2\mu_o}$ valeur uniforme. Comme le champ magnétique est nul en-dehors du solénoïde, l'énergie magnétique totale est :

$$W_{mag} = u_{mag}V = \frac{1}{2}\frac{\mu_o S N^2}{\ell} i^2$$

En considérant que les deux énergie calculées sont les mêmes, on obtient :

$$L = \frac{\mu_o S N^2}{\ell}$$

Partie II. Champs électriques et magnétique à l'intérieur d'un solénoïde.

1)Le champ magnétique dépend maintenant du temps donc sa dérivée par rapport au temps est non nulle, donc le rotationnel du champ électrique est non nul donc le champ électrique ne peut pas être nul

2)MF en coordonnées cylindriques donne, avec les indications de l'énoncé :

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr}(rE_\theta) = \mu_o \omega n I_o \cdot sin(\omega t) \quad avec \quad \vec{E} = E_\theta \vec{e}_\theta$$

relation qu'on peut intégrer par rapport à r. La constante qui apparaît sera prise nulle pour éviter une divergence de E_θ en r=0. On obtient : $E_\theta = \frac{1}{2}\mu_o \omega n I_o \cdot sin(\omega t) r$

Partie III.Introduction d'un conducteur dans le solénoïde.

1a) La loi d'Ohm donne : $\vec{J} = \gamma\vec{E} = \frac{1}{2}\gamma\mu_o\omega nI_o \cdot sin(\omega t)r\vec{e}_\theta$

1b)La puissance perdue par effet Joule prend la forme $dP_J=\gamma E^2 d\tau$.

Soit : $dP_J = \gamma\left(\frac{1}{2}\mu_o\omega nI_o \cdot sin(\omega t)r\right)^2 rdrd\theta dz$

grandeur qu'il faut intégrer, de r=0 à r=a , de z=0 à z=h, de θ=0 à 2π. Les deux dernières intégrations reviennent à une simple multiplication par 2πh.

L'intégration donne : $P_J(t) = \frac{\gamma\pi ha^4\left(\mu_o\omega nI_o\cdot sin(\omega t)\right)^2}{8}$

dont la valeur moyenne est : $P_M = \langle P_J(t)\rangle = \frac{\gamma\pi ha^4(\mu_o\omega nI_o)^2}{16}$.

1c)Une application est le chauffage de pièces métalliques par induction, par exemple une casserole avec une plaque à induction. Cette méthode est aussi utilisée industriellement pour faire fondre des pièces métalliques dans des fours à induction ; cela peut être assez dangereux.

2a)L'énoncé dit d'utiliser le théorème d'Ampère. Le contour à choisir est identique à celui du solénoïde infini. On va ici utiliser la relation de MA, dans le cadre de l'ARQS, donc en négligeant le courant de déplacement.

En coordonnées cylindriques, cette relation donne ici avec les indications de l'énoncé :

$\frac{dB'}{dr} = -\mu_o\gamma E_\theta = -\mu_o\frac{1}{2}\gamma\mu_o\omega nI_o \cdot sin(\omega t)r$ qu'on peut intégrer par rapport à r.

La constante d'intégration est fournie par l'énoncé qui indique que B' doit être nul pour r=a.

On obtient :$B' = \frac{\gamma\mu_0^2\omega nI_o\cdot sin(\omega t)}{4}(a^2 - r^2)$

Le rapport des amplitudes est alors :

$$\frac{amp(B')}{amp(B)} = \frac{\gamma\omega\mu_o}{4}(a^2 - r^2)$$

Pour que ce dernier rapport puise être considéré petit devant 1, il faut : $\gamma\omega \ll \frac{1}{\mu_o a^2}$.

L'inégalité sera d'autant mieux vérifiée que le métal sera peu conducteur et la fréquence faible.

Extrait ATS 2006.

5.1) $\sigma = \dfrac{Q}{\pi a^2}$ 5.2)On a $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\vec{e}_z$ entre les deux armatures, nul ailleurs.

5.3)Sous forme différentielle, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}(V)$ donne $dV = -\vec{E}.d\overrightarrow{OM}$ qu'on intègre de z=0 à z=e. On obtient : $V_1 - V_2 = \dfrac{\sigma e}{\varepsilon_o} = \left(\dfrac{e}{S\varepsilon_o}\right).Q = \dfrac{Q}{C}$

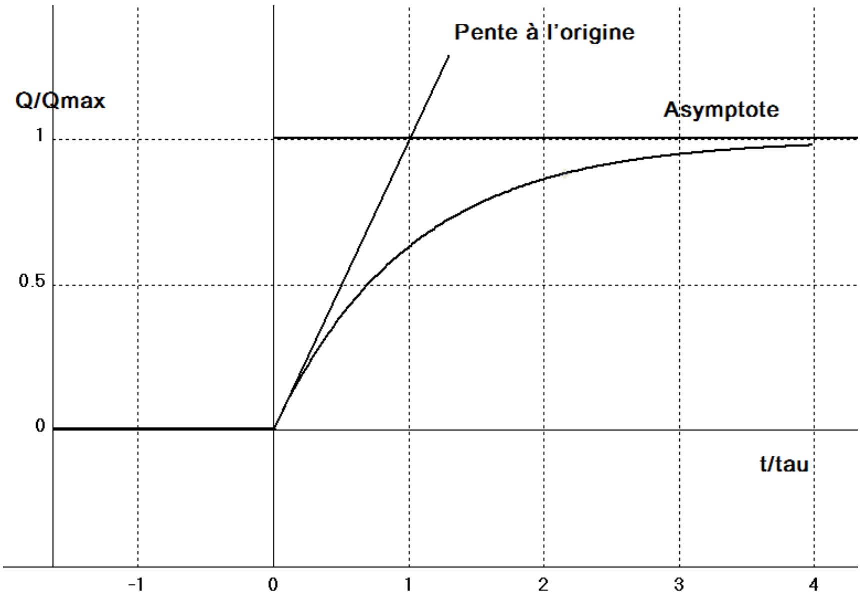
5.4)La fin du calcul précédent donne : $C = \left(\dfrac{S\varepsilon_o}{e}\right)$.

5.5) $W_P = \dfrac{1}{2}.\dfrac{Q^2}{C}$ qu'on réécrit sous la forme finale : $W_P = \dfrac{\varepsilon_o}{2}\left(\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o}\right)^2.S.e$

On retrouve alors la densité volumique d'énergie électrique $u_e=\varepsilon_o E^2/2$.

6.1)LDM $\rightarrow$ $Q + \tau\dot{Q} = CU_o$. On intègre en tenant compte de la continuité de la charge du condensateur vis-à-vis du temps ($Q(0^+)=Q(0^-)=0$). On obtient : $Q(t) = CU_o\left(1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right)$.

6.2)τ est un temps. La représentation graphique de Q(t) est la suivante :



6.3)Pendant dt , le générateur fournit la charge dQ=idt sous la tension U_o. L'énergie fournie est donc $dW_1=U_o.i.dt=U_o dQ$ qu'on peut intégrer de l'état initial (Q=0) à l'état final ($Q=CU_o$) et on obtient $W_1=CU_o^2$.

L'énergie emmagasinée dans C est $W_2=CU_o^2/2$ soit $W_1/2$. Par conservation de l'énergie, on en déduit que l'énergie consommée par la résistance R est donc $W_3=W_1-W_2=CU_o^2/2$.

6.4)On calcule : $\sigma(t) = \dfrac{\varepsilon_o U_o}{e}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ puis $\vec{E}(t) = \dfrac{U_o}{e}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\vec{e}_z$

6.5)Dans l'espace inter-armatures, le courant de conduction est nul, ce qui simplifie l'écriture de la relation. On calcule à partir de la réponse précédente : $\vec{j}_D(t) = \dfrac{\varepsilon_o U_o}{e\tau} e^{-t/\tau}\vec{e}_z$.

6.6)Quand on passe de la forme locale à la forme intégrée, on obtient ici :

$$\oint_{\text{courbe orientée}} \vec{B}.d\overrightarrow{OM} = \mu_o \iint_{\text{surface orientée}} \vec{j}_D.\vec{n}.dS$$

6.7)On considère un point M. On prend le plan contenant l'axe Oz et passant par M. Ce plan est un plan de symétrie physique pour le système de courants, donc le champ magnétique en M est orthogonal à ce plan, donc selon $\vec{u}_\theta$. Donc : $\vec{B}(M) = B(M)\vec{u}_\theta = B(r,\theta,z)\vec{u}_\theta$

On a ensuite invariance du système de courant par translation selon Oz et rotation d'axe Oz . Donc B(M) ne dépend ni de z ni de θ. On a l'écriture proposée.

6.8)Théorème d'Ampère sur le cercle de rayon r d'axe Oz. Le courant intérieur est $j.\pi r^2$. La circulation du champ sur le cercle est $2\pi rB(r)$. On obtient : $B(r) = \frac{1}{2}\mu_o jr$.

6.9)Il s'agit tout simplement de la combinaison des résultats des questions 6.6 ; 6.7 et 6.8.

6.10) $\vec{\Pi} = \vec{E} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_o}$.

6.11)Simple calcul avec les expressions précédentes et r=a.

6.12)Ecrivons $\vec{\Pi}(r = a,t) = -\Pi(t)\vec{u}_r$.

Soit le cylindre de rayon a entre les deux armatures. Le vecteur unitaire sortant est $\vec{u}_r$ et la puissance sortant à travers la surface dS est :

$$dP_{ext} = \vec{\Pi}(r = a,t).\vec{u}_r.dS = -\Pi(t)\vec{u}_r.\vec{u}_r dS = -\Pi(t)dS$$

et la puissance totale sortante est donc $P_{ext}=-\Pi(t).S=-\Pi(t).[2\pi ae]$.

6.13)On en déduit alors la puissance entrante $P_{int}=-P_{ext}$.

L'énergie entrante pendant l'intervalle de temps dt est donc $dW_{int}=P_{int}.dt$. Pour obtenir l'énergie totale entrante par la surface latérale, il faut intégrer sur toute la charge du condensateur soit de t=0 à $t\to+\infty$.

Et , Oh miracle, on trouve $W_{int}=W_2$.

Il semblerait donc que l'énergie stockée dans le condensateur soit entrée par la surface latérale du condensateur.