TD13 : Séries de fonctions et espaces préhilbertiens

Exercice 1 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2024)**

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ et $\ln(1+t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$ si $|t| < 1$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(kn+1)}$.

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+x)}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

3. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{\pi^2}{12n}$.

4. Montrer que $u_n = a + \dfrac{b}{n} + \dfrac{c}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2024)**

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ en montrant la convergence de la série et de l'intégrale. *(*)*

Exercice 3 **(Centrale PSI 2024)**

Pour $x \in]0, \pi[$ fixé, on définit $S_x : t \longmapsto \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} t^{p-1} \sin(px)$

1. Montrer que S_x est définie sur $[0, 1[$ et calculer $S_x(t)$ pour $t \in [0, 1[$.

2. Justifier que S_x est intégrable sur $[0, 1[$ et calculer $\displaystyle\int_0^1 S_x(t)\,\mathrm{d}t$.

3. Justifier la convergence et déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\sin(px)}{p}$. *(*)*

Exercice 4 **(Centrale PSI 2014)**

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n+n^2x}$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3. Montrer que $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 5 **(Centrale PSI 2022)**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in\ ]-1, 1[\,,\ u_n(x) = (-1)^n \dfrac{x^n}{1-x^n}$. On pose : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

2. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, 1[,\ v_n(x) = (1-x)u_n(x)$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n(x)$ converge uniformément sur $[0, 1]$ et en déduire un équivalent de f en 1^-.

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2024)**

Soient $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$.

1. Montrer que $(f|g) = \displaystyle\int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t))\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

2. V et W sont-ils orthogonaux ? Supplémentaires orthogonaux ? *(*)*

Exercice 7 **(CCP PSI 2010)**

Soit E préhilbertien réel tel qu'il existe une famille de vecteurs unitaires $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifiant $\forall x \in E, \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (e_j|x)^2 = \|x\|^2$.

Montrer que cette famille est orthonormale et en déduire que E est de dimension finie que l'on précisera. *(*)*

Indications

Exercice 2

$|\sin t| \leqslant |t|$

Exercice 3

3. *TCD appliqué aux sommes partielles*

Exercice 6

2. *Pour montrer qu'ils sont supplémentaires, trouver une base de W.*

Exercice 7

Pour la dimension, considérer $x \in \mathrm{Vect}\{e_1, \ldots, e_n\}^\perp$.