Correction du DM10

Extrait de CCP PC 2006 maths 1

Partie I :

1. cours !

2. a) $\boxed{p(z)=\sum_{i=1}^{k}(e_i|z)e_i}$

b) i. $M(p)Z=\sum_{i=1}^{k}E_i^TZE_i$ puisque $(e_i|z)=E_i^TZ$ et comme E_i^TZ est un scalaire, on a $\left(E_i^TZ\right)E_i=E_i\left(E_i^TZ\right)$ donc $\boxed{M(p)Z=\sum_{i=1}^{k}E_iE_i^TZ}$

ii. L'expression précédente étant valable pour tout Z, on a (par unicité de la matrice associée à un endomorphisme dans la base $\mathcal{C}$) $\boxed{M(p)=\sum_{i=1}^{k}E_iE_i^T}$

c) Soit $z\in F$, on a $z=p(z)+(z-p(z))$ avec $p(z)\perp(z-p(z))$ donc d'après le théorème de Pythagore $\|p(z)\|^2=\|z\|^2-\|z-p(z)\|^2$ et $\boxed{\|p(z)\|\leqslant\|z\|^2}$ (inégalité de Bessel)

d) On décompose de même x et y en $x=x_1+x_2$ et $y=y_1+y_2$ avec $x_1,y_1\in\ker(p)$ et $x_2,y_2\in\mathrm{Im}(p)$ et on a $(p(x)|y)=(x_2|y_1+y_2)=(x_2|y_2)$ car $x_2\perp y_1$. On trouve de même $(x|p(y))=(x_2|y_2)$ donc $\boxed{(p(x)|y)=(x-p(y))}$

3. a) On vérifie que $M^2=M$ donc M est une matrice d'un projecteur p. On pourrait vérifier, en déterminant des bases de chaque espace, que $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont orthogonaux mais on peut le justifier autrement : on remarque que M est symétrique donc si $(x,y)\in\ker(p)\times\mathrm{Im}(p)$, on a $p(x)=0$ et $p(y)=y$ puis $(x|y)=X^TY=X^T(MY)=X^TM^TY=(MX)^TY=(p(x)|y)=0$ donc $\ker(p)\perp\mathrm{Im}(p)$ et $\boxed{p\text{ est un projecteur orthogonal}}$

b) On a $(x,y,z,t)\in\ker(p)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x-z=0\\y-t=0\end{array}\right.$ donc si $u_1=(1,0,1,0)$ et $u_2=(0,1,0,1)$, on a $\ker(p)=\mathrm{Vect}\{u_1,u_2\}$; de plus ces vecteurs sont libres donc forment une base de $\ker(p)$. On peut de plus remarquer qu'ils sont orthogonaux donc $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1,0)\text{ et }\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,1)\text{ forment une base orthonormale de }\ker(p)}$

On a aussi $\mathrm{rg}(p)=4-\dim(\ker(p))=2$ (ce qui est conforme avec $\mathrm{Tr}(p)=\mathrm{rg}(p)$ pour un projecteur), les deux vecteurs $v_1=\frac{1}{2}(1,0,-1,0)$ et $v_2=\frac{1}{2}(0,1,0,-1)$ sont deux vecteurs libres de $\mathrm{Im}(p)$ donc en forment une base.

Ils sont orthogonaux donc une base orthonormale de $\mathrm{Im}(p)$ est formée de $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1,0)\text{ et }\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,0,-1)}$

4. a) $\lambda\neq0$ donc $u=\frac{1}{\lambda}p\circ r(u)\in\mathrm{Im}(p)=H$ et $p(r(u)-\lambda u)=\lambda u-\lambda p(u)=0$ car $u\in H$ donc $p(u)=u$. On a donc $r(u)-\lambda u\in\ker(p)=H^\perp$.

b) On en déduit $0=(u|r(u)-\lambda u)$ donc $\lambda\|u\|^2=(r(u)|u)=(r^2(u)|u)=(r(u)|r(u))$ d'après **I.2.d** appliqué à r. On conclut $\boxed{\lambda\|u\|^2=\|r(u)\|^2}$

c) On a $\lambda\|u\|^2=\|r(u)\|^2$ donc, comme $\|u\|^2>0$ on a $\lambda\geqslant0$. Avec **I.2.c** appliqué à r, on a $\lambda\|u\|^2=\|r(u)\|^2\leqslant\|u\|^2$ donc $(1-\lambda)\|u\|^2\geqslant0$ puis $\lambda\leqslant1$, toujours car $\|u\|^2>0$.

5. a) On a, par commutativité de p et r, $(p\circ r)^2=p^2\circ r^2=p\circ r$ donc $\boxed{p\circ r\text{ est un projecteur}}$

b) Si $x\in\ker(p)+\ker(r)$ alors $x=a+b$ avec $p(a)=r(b)=0$ donc $p\circ r(x)=r(p(a))+p(r(b))=0$, ce qui donne $\ker(p)+\ker(r)\subset\ker(p\circ r)$. Réciproquement, si $x\in\ker(p\circ r)$, alors $p(r(x))=0$ donc $r(x)\in\ker(p)$; on écrit alors $x=r(x)+(x-r(x))$ et comme $r(x-r(x))=r(x)-r^2(x)=0$, on a $x-r(x)\in\ker(r)$, on en déduit $x\in\ker(p)+\ker(r)$ puis $\boxed{\ker(p\circ r)=\ker(p)+\ker(r)}$

Si $y\in\mathrm{Im}(p\circ r)$ alors $y=p(r(a))\in\mathrm{Im}(p)$ et par commutativité, on a aussi $y=r(p(a))\in\mathrm{Im}(r)$ donc $\mathrm{Im}(p\circ r)\subset\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)$. Réciproquement, comme p et r sont des projecteurs, si $y\in\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)$ alors on a $y=p(y)=r(y)$, ce qui donne $y=p\circ r(y)\in\mathrm{Im}(p\circ r)$ puis $\boxed{\mathrm{Im}(p\circ r)=\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)}$

c) Soit $x\in\ker(p\circ r)$ et $y\in\mathrm{Im}(p\circ r)=\mathrm{Im}(p)\cap\mathrm{Im}(r)$, on peut écrire $x=a+b$ avec $p(a)=0$ et $r(b)=0$; on a alors $(x|y)=(a|y)+(b|y)=0$ car p et r sont des projecteurs orthogonaux donc $\ker(p)^\perp=\mathrm{Im}(p)$ et $\ker(r)^\perp=\mathrm{Im}(r)$. On en déduit bien que $\boxed{p\circ r\text{ est un projecteur orthogonal}}$

6. a) Les trois premières égalités découlent de $Q^2=Q$. Comme la base choisie est orthonormale, on a $q_{i,j}=(e_i|q(e_j))=(q(e_i)|e_j)$ d'après **I.2.d** donc Q est symétrique, ce qui donne les trois autres relations.

b) On raisonne par implications « circulaires » :

i) $\Rightarrow$ *ii)* $PQ = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\mathcal{X}_{por} = X^{m-k}\mathcal{X}_A$. Ainsi, si $\mathrm{Sp}(p \circ q) \subset \{0,1\}$ alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0,1\}$. Comme A est symétrique réelle d'après la question précédente, A est diagonalisable et $X(X-1)$ annule donc A. Mais $0 = A^2 - A = -BC = -C^T C$ donne donc $\boxed{C^T C = 0}$

ii) $\Rightarrow$ *iii)* On a $\mathrm{Tr}(C^T C) = 0$ donc (produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{m-k,k}(\mathbb{R})$), $\boxed{C = 0}$

iii) $\Rightarrow$ *iv)* Vérifier $PQ = QP$ en utilisant $C = 0$ donc $B = C^T = 0$.

iv) $\Rightarrow$ *i)* D'après **I.5**, $p \circ r$ est un projecteur (orthogonal) donc $X^2 - X$ annule $p \circ r$ et $\boxed{\mathrm{Sp}(p \circ r) \subset \{0,1\}}$

Partie II :

1. $\min\limits_{x \in E} \|f(x) - v\| = \min\limits_{y \in \mathrm{Im}(f)} \|y - v\| = d(v, \mathrm{Im}(f)) = \|\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v) - v\|$ si $\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v)$ est le projeté orthogonal de v sur $\mathrm{Im}(f)$. Comme $\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v) \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x_0 \in E$ tel que $\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v) = f(x_0)$ donc $\boxed{\min\limits_{x \in E} \|f(x) - v\| = \|f(x_0) - v\|}$

2. $d(v, \mathrm{Im}(f))$ est atteinte en un unique vecteur de $\mathrm{Im}(f)$ qui est $\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v)$ et si f est injective, $\pi_{\mathrm{Im}(f)}(v)$ admet un unique antécédent x_0 par f donc $\boxed{x_0 \text{ est l'unique pseudo-solution de (1)}}$

3. x_0 est une pseudo-solution de (1) si et seulement si $f(x_0) = \pi_{\mathrm{Im}(f)}(v)$ donc si et seulement si $f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)$ (ce qui est évident) et $v - f(x_0) \in \mathrm{Im}(f)^\perp$, ce qui équivaut à $\boxed{(v - f(x_0) | f(x)) = 0 \text{ pour tout } x \text{ de } E}$

4. $(f(x)|f(x_0) - v) = (XA)^T(AX_0 - V)$ donc x_0 est une pseudo-solution de (1) si et seulement si pour tout X, on a $X^T(A^T A X_0 - A^T V) = 0$, ce qui signifie que le vecteur $A^T A X_0 -^T AV$ est orthogonal à tout vecteur X donc est nul. On en déduit que x est pseudo-solution de (1) si et seulement si $\boxed{A^T A X_0 = A^T V}$

5. $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ donc $A^T A X_0 = A^T V \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ 6y = 3 \end{cases}$, si $X_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; donc l'ensemble des pseudo-solutions est $\boxed{\left\{ \left(x, \frac{1}{2}, x \right), x \in \mathbb{R} \right\} = \frac{1}{2}(0,1,0) + \mathrm{Vect}\{(1,0,1)\}}$

6. a) Si f est l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ et v le vecteur de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est $V = \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_n \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la question est équivalente à la recherche de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|f(\lambda, \mu) - v\|^2$ soit minimale donc à la recherche des $\boxed{\text{pseudo-solution de } f(\lambda, \mu) = v}$

b) f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$, si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = 2$ donc si et seulement si $\boxed{a \text{ et } b \text{ sont libres}}$

c) On vérifie que $A^T A = \begin{pmatrix} \|a\|^2 & (a|b) \\ (a|b) & \|b\|^2 \end{pmatrix}$ et $A^T V = \begin{pmatrix} (a|c) \\ (b|c) \end{pmatrix}$ donc $A^T A \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = A^T V \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \lambda = \dfrac{(a|c)\|b\|^2 - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \\ \mu = \dfrac{\|a\|^2(b|c) - (a|b)(a|c)}{\|a\|^2\|b\|^2 - (a|b)^2} \end{cases}}$

le dénominateur étant non nul (strictement positif) par caractérisation de l'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Partie II :

1. a) On commence par décomposer $F = \mathrm{Im}(f) \overset{\perp}{\oplus} (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ donc on peut écrire $y = z + y'$ avec $y' \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$ et $z \in \mathrm{Im}(f)$. Il existe donc $u \in E$ tel que $z = f(u)$. Cette fois, on décompose $E = \ker(f) \overset{\perp}{\oplus} (\ker f)^\perp$ donc on peut écrire $u = x + x'$ avec $x \in (\ker f)^\perp$ et $x' \in \ker(f)$. On a donc $z = f(u) = f(x)$. Finalement, on a $\boxed{y = f(x) + y' \text{ avec } x \in (\ker f)^\perp \text{ et } y' \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp}$

b) Supposons avoir deux décompositions de $y = f(x) + y' = f(x') + y''$ avec $(x, x') \in \left((\ker f)^\perp\right)^2$ et $(y', y'') \in \left((\mathrm{Im}\, f)^\perp\right)^2$; on a alors $f(x - x') = y'' - y' \in (\mathrm{Im}\, f) \cap (\mathrm{Im}\, f)^\perp = \{0\}$ donc $y' = y''$ et $f(x - x')0$. On en déduit $x - x' \in (\ker f) \cap (\ker f)^\perp$ et $x = x'$. Ainsi $\boxed{x \text{ et } y' \text{ sont uniques}}$

c) Si $y_1 = f(x_1) + y_1'$ et $y_2 = f(x_2) + y_2'$ avec $(x_1, x_2) \in \left((\ker f)^\perp\right)^2$ et $(y_1', y_2') \in \left((\mathrm{Im}\, f)^\perp\right)^2$ et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha y_1 + \beta_2 = f(\alpha x_1 + \beta x_2) + (\alpha y_1' + \beta y_2')$ avec $\alpha x_1 + \beta x_2 \in (\ker f)^\perp$ et $\alpha y_1' + \beta y_2' \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp$. On en déduit $g(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha g(y_1) + \beta g(y_2)$ donc $\boxed{g \in \mathcal{L}(F, E)}$

2. Si $y \in \ker(g)$ alors $y = f(g(y)) + y' = y'$ donc $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ et si réciproquement, on a $y \in (\operatorname{Im} f)^\perp$, on peut écrire $y = f(0) + y$ avec $0 \in (\ker f)^\perp$ donc $g(y) = 0$. On a donc $\boxed{\ker(g) = (\operatorname{Im} f)^\perp}$

D'autre part, par définition de g, on a $g(y) = x \in (\ker f)^\perp$ donc $\operatorname{Im}(g) \subset (\ker f)^\perp$. De plus, comme $g \in \mathcal{L}(F, E)$, le théorème du rang donne $\operatorname{rg}(g) = \dim(F) - \dim(\ker g) = \dim(F) - \dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim(F) - \dim(F) + \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(f)$ et $\dim(\ker f)^\perp = \dim(E) - \dim(\ker f) = \operatorname{rg}(f)$ donc $\operatorname{rg}(g) = \dim(\ker f)^\perp$ et $\boxed{\operatorname{Im}(g) = (\ker f)^\perp}$

3. a) Tout d'abord, $g \circ f$ est bien un endomorphisme de E. Si $x = x_0 + x_1$ avec $x_0 \in \ker(f)$ et $x_1 \in (\ker f)^\perp$ alors $f(x) = f(x_1) + 0$ et $0 \in (\operatorname{Im} f)^\perp$ donc $g \circ f(x) = x$, ie $\boxed{g \circ f \text{ est le projecteur orthogonal sur } (\ker f)^\perp}$

b) De même, on a $f \circ g \in \mathcal{L}(F)$ et si $y \in F$, on peut écrire $y = f(x) + y'$ avec $x = g(y) \in (\ker f)^\perp$ et $y' \in (\operatorname{Im} f)^\perp$; on en déduit que la décomposition de y selon $F = \operatorname{Im}(f) \overset{\perp}{\oplus} (\operatorname{Im} f)^\perp$ est $y = f(g(y)) + y'$, ce qui signifie que $\boxed{f \circ g \text{ est le projecteur orthogonal sur } \operatorname{Im}(f)}$

4. On a $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\{(1,0),(1,1),(0,1)\} = \mathbb{R}^2$ donc $(\operatorname{Im} f)^\perp = \{0\}$ et $\ker(f) = \operatorname{Vect}\{((1,-1,1)\}$ ce qui donne $(\ker f)^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y + z = 0\}$. Si $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on doit écrire $u = f(\alpha,\beta,\gamma) + 0$ avec la condition $\alpha - \beta + \gamma = 0$, ie $\begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta + \gamma \\ 0 = \alpha - \beta + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = (2x - y)/3 \\ \beta = (x + y)/3 \\ \gamma = (-x + 2y)/3 \end{cases}$ On en déduit $g(x,y) = \dfrac{1}{3}(2x - y, x + y, -x + 2y)$ et

$$\boxed{B = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_c}(g) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

On peut alors vérifier $AB = I_2$ qui est la matrice du projecteur orthogonal sur $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ et $BA = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice du projecteur orthogonal sur $(\ker f)^\perp$.