

Familles sommables

I Familles de nombre réels positifs

Définition : (Cas positif)

Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de réels appartenant à $[0, +\infty]$. On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** s'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour toute partie finie $J \subset I$, on ait

$$\sum_{i \in J} x_i \leq M$$

Dans ce cas, on définit la **somme** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ par

$$\sum_{i \in I} x_i = \sup \left\{ \sum_{i \in J} x_i, J \subset I, J \text{ finie} \right\}$$

Dans le cas contraire, on écrira $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$.

Remarque(s) :

(I.1) S'il existe un indice $i \in I$ tel que $x_i = +\infty$ alors $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, donc $\sum_{i \in I} x_i = +\infty$.

(I.2) On écrira $\sum_{i \in I} x_i < +\infty$ pour désigner le fait que la famille de réels positifs $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.

(I.3) Dans le cas d'une famille de réels positifs, le calcul de la somme de la famille constitue une preuve de la sommabilité : la famille est sommable si et seulement si sa somme ne vaut pas $+\infty$.

Exemple(s) :

(I.4) Si $I = \{(p, q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 2, q \geq 2\}$ et $u_{p,q} = \frac{1}{q^p}$ alors $(u_{p,q})_{(p,q) \in I}$ est sommable.

Propriété [I.1] : Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs sommable et si $J \subset I$ alors $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

II Familles de nombres complexes

Définition [II.1] : (Cas complexe)

Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** si la famille $(|x_i|)_{i \in I}$ est sommable donc si

$$\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$$

Dans ce cas, la **somme** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est définie par :

- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$ si $(x_i)_{i \in I}$ est **réelle**, avec $x_i^+ = \frac{1}{2}(|x_i| + x_i)$ et $x_i^- = \frac{1}{2}(|x_i| - x_i)$.
- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$ si $(x_i)_{i \in I}$ est **complexe**.

Remarque(s) :

(II.1) Si $I = \mathbb{N}$, la famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_n$ est absolument convergente et dans ce cas $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ (la somme de la famille est aussi la somme de la série).

Propriété [II.2] : (Théorème de comparaison)

Soient $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(y_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ sont deux familles indicées par le même ensemble I telles que

$$\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$$

Si $(y_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable

Dans ce cas, on a $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i| \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Propriété [II.3] : (Linéarité)

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$, indicées par le même ensemble I , et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors la famille $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i \in I} x_i + \beta \sum_{i \in I} y_i$$

Remarque(s) :

- (II.2) La réciproque est fausse : si $(x_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable et $y_i = -x_i$ alors $(x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable.
- (II.3) Plus généralement, si $(x_i + y_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(y_i)_{i \in I}$ est sommable.

Propriété [II.4] : Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ et σ une permutation de I (ie une bijection de I sur I). La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable.

Dans ce cas, on a $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.

Remarque(s) :

- (II.4) Cela signifie que la sommabilité et la valeur de la somme ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on numérote les x_i .

III Procédés de sommation

Théorème [III.1] : (Sommation par paquets)

Soient $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'ensemble I , ie

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset.$$

Alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$$

Remarque(s) :

(III.1) $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right) < +\infty$ signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_i)_{i \in I_n}$ est sommable, donc

$\sum_{i \in I_n} |x_i|$ existe, et la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right)$ est convergente.

(III.2) Certains des I_n peuvent être vides. En particulier, s'ils sont tous vides sauf un nombre fini d'entre eux, on peut utiliser une partition finie de I .

Exemple(s) :

(III.3) Calculer $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(III.4) Montrer que $\left(\frac{1}{pq(p+q)} \right)_{p,q \geq 1}$ est sommable.

Théorème [III.2] : (Théorème de Fubini)

Soit $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $\mathbb{K}$ indexée par $I \times J$, avec I et J au plus dénombrables.

Alors $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} |x_{i,j}| \right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} x_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} x_{i,j} \right)$$

Exemple(s) :

(III.5) Calculer $\sum_{p,q \geq 2} \frac{1}{q^p}$ et en déduire la valeur de $\sum_{p=2}^{+\infty} (\zeta(p) - 1)$, où $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ si $x > 1$.

Propriété [III.3] : Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$ alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\left(\sum_{i \in I} x_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} y_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j$$

Remarque(s) :

(III.6) On retrouve ainsi la propriété sur le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.