

Familles sommables : preuves

Propriété [I.3] : Si $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs sommable et si $J \subset I$ alors $(x_i)_{i \in J}$ est sommable et

$$\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$$

Preuve :

Si K est une partie finie de J alors $K \subset I$ donc, par définition de la borne supérieure (c'est un majorant), on a $\sum_{i \in K} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$ (qui est une constante, indépendante de la partie K) donc $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$.

Définition [I.4] : (Cas complexe)

Soient I un ensemble fini ou dénombrable et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de complexes. On dit que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est **sommable** si la famille $(|x_i|)_{i \in I}$ est sommable donc si

$$\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$$

Dans ce cas, la **somme** de la famille $(x_i)_{i \in I}$ est définie par :

- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^-$ si $(x_i)_{i \in I}$ est **réelle**, avec $x_i^+ = \frac{1}{2}(|x_i| + x_i)$ et $x_i^- = \frac{1}{2}(|x_i| - x_i)$.
- $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$ si $(x_i)_{i \in I}$ est **complexe**.

Preuve :

- On vérifie $0 \leq x_i^+ \leq |x_i|$ et $0 \leq x_i^- \leq |x_i|$ donc le théorème de comparaison (cf plus bas) prouve la sommabilité de $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ donc l'existence des deux sommes.
- On a $|\operatorname{Re}(x_i)| \leq |x_i|$ et $|\operatorname{Im}(x_i)| \leq |x_i|$ donc le théorème de comparaison (cf plus bas) prouve la sommabilité de $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$ donc l'existence des deux sommes.

Ces définitions coïncident bien sûr avec les sommes habituelles lorsque I est un ensemble fini puisque $x_i = x_i^+ - x_i^-$ dans le cas réel et $x_i = \operatorname{Re}(x_i) + i \operatorname{Im}(x_i)$ dans le cas complexe.

Propriété [I.5] : (Théorème de comparaison)

Soient $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(y_i)_{i \in I} \in (\mathbb{R}^+)^I$ sont deux familles indicées par le même ensemble I telles que

$$\forall i \in I, |x_i| \leq y_i$$

Si $(y_i)_{i \in I}$ est sommable alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable

Dans ce cas, on a $\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i| \leq \sum_{i \in I} y_i$.

Preuve :

Si J est finie, $J \subset I$ alors par sommation (finie) des inégalités, $\sum_{i \in J} |x_i| \leq \sum_{i \in J} y_i \leq \sum_{i \in I} y_i$ (constante) donc $(x_i)_{i \in I}$ est sommable.

Les inégalités découlent de l'inégalité triangulaire (sur les sommes finies)

Propriété [I.6] : (Linéarité)

Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$, indicées par le même ensemble I , et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ alors la famille $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i \in I}$ est sommable et

$$\sum_{i \in I} (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i \in I} x_i + \beta \sum_{i \in I} y_i$$

Preuve :

1. Pour la sommabilité : si J finie, $J \subset I$ alors $\sum_{i \in J} |\alpha x_i + \beta y_i| \leq |\alpha| \sum_{i \in J} |x_i| + |\beta| \sum_{i \in J} |y_i| \leq |\alpha| \sum_{i \in I} |x_i| + |\beta| \sum_{i \in I} |y_i|$ (constante) donc $(\alpha x_i + \beta y_i)_{i \in I}$ est sommable.
2. Pour l'addition :
 - a) Dans le cas positif ($x_i \geq 0$ et $y_i \geq 0$) : si J_1 et J_2 sont deux parties finies de I , alors, puisque $J_1 \cup J_2$ est aussi une partie finie de I , $\sum_{i \in J_1} x_i + \sum_{i \in J_2} y_i \leq \sum_{i \in J_1 \cup J_2} (x_i + y_i) \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i)$. On a donc $\sum_{i \in J_1} x_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i) - \sum_{i \in J_2} y_i$ pour toute partie finie J_1 de I donc $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i) - \sum_{i \in J_2} y_i$. Ce qui donne aussi $\sum_{i \in J_2} y_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i) - \sum_{i \in I} x_i$, pour toute partie finie J_2 de I ; on a donc $\sum_{i \in I} y_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i) - \sum_{i \in I} x_i$, ie $\sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i \leq \sum_{i \in I} (x_i + y_i)$.
On prouve l'inégalité inverse : si J est une partie finie de I alors $\sum_{i \in J} (x_i + y_i) = \sum_{i \in J} x_i + \sum_{i \in J} y_i \leq \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$, pour toute partie J finie de I donc $\sum_{i \in I} (x_i + y_i) \leq \sum_{i \in I} x_i + \sum_{i \in I} y_i$.
 - b) Puis l'addition dans le cas réel : on vérifie que $(x_i + y_i)^+ + x_i^- + y_i^- = (x_i + y_i)^- + x_i^+ + y_i^+$ (tester les cas en fonction des signes de x_i et y_i); toutes les quantités étant positives, le premier cas peut s'appliquer et donne $\sum_{i \in I} (x_i + y_i)^+ + \sum_{i \in I} x_i^- + \sum_{i \in I} y_i^- = \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^- + \sum_{i \in I} x_i^+ + \sum_{i \in I} y_i^+$ donc on en déduit l'égalité cherchée :

$$\sum_{i \in I} (x_i + y_i)^+ - \sum_{i \in I} (x_i + y_i)^- = \sum_{i \in I} x_i^+ - \sum_{i \in I} x_i^- + \sum_{i \in I} y_i^+ - \sum_{i \in I} y_i^-.$$
 - c) Dans le cas complexe, il suffit d'appliquer le cas réel aux parties réelles et imaginaires.
3. Pour la multiplication par un scalaire :
 - a) Dans le cas positif ($\alpha \geq 0$ et $x_i \geq 0$) : pour toute partie J de I finie, on a $\sum_{i \in J} \alpha x_i = \alpha \sum_{i \in J} x_i$ qui donne

$$\sum_{i \in I} \alpha x_i = \alpha \sum_{i \in I} x_i$$
 - b) Dans le cas réel ($\alpha \in \mathbb{R}$ et $x_i \in \mathbb{R}$), on vérifie que $(\alpha x_i)^+ = \begin{cases} \alpha x_i^+ & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha x_i^- & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$ et $(\alpha x_i)^- = \begin{cases} \alpha x_i^- & \text{si } \alpha \geq 0 \\ -\alpha x_i^+ & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$, ce qui donnera le résultat en revenant à la définition de la somme.
 - c) Dans le cas complexe, il suffit de décomposer α et x_i avec leurs parties réelles et imaginaires.

Propriété [I.7] : Soient $(x_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathbb{K}$ et σ une permutation de I (ie une bijection de I sur I). La famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la famille $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable.

Dans ce cas, on a $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$.

Preuve :

Dans le cas positif, si J est une partie finie de I alors $\sigma(J)$ est aussi une partie finie de I donc $\sum_{i \in J} x_{\sigma(i)} = \sum_{k \in \sigma(J)} x_k \leq \sum_{i \in I} x_i$

donc $(x_{\sigma(i)})_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} \leq \sum_{i \in I} x_i$. L'inégalité inverse se prouve en utilisant la réciproque σ^{-1} : on a

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} x_{\sigma^{-1}(\sigma(i))} \leq \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}$$

Dans le cas réel, on fait de même pour x_i^+ et x_i^- ; dans le cas complexe pour les parties réelles et imaginaires de x_i .

Théorème [I.8] : (Sommutation par paquets)

Soient $(x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ et $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une **partition** de l'ensemble I , ie

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \quad \text{et} \quad n \neq m \Rightarrow I_n \cap I_m = \emptyset.$$

Alors $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$$

Preuve :

1. Dans le cas positif : si J est une partie finie de I alors $J = J \cap I = J \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (J \cap I_n)$ et cette réunion comporte un nombre fini d'ensembles non vides (car J est finie) ; il existe donc un entier N_J tel que $I_n \cap J = \emptyset$ pour $n > N_J$. Par commutativité des sommes finies, on a $\sum_{i \in J} x_i = \sum_{n \leq N_J} \sum_{i \in I_n \cap J} x_i$.

Si on suppose que $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) < +\infty$, alors $\sum_{i \in I_n \cap J} x_i \leq \sum_{i \in I_n} x_i$ et $\sum_{i \in J} x_i \leq \sum_{n \leq N_J} \sum_{i \in I_n} x_i \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) < +\infty$

donc $(x_i)_{i \in I}$ est sommable et $\sum_{i \in I} x_i \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$.

Si on suppose $(x_i)_{i \in I}$ sommable alors $I_n \subset I$ donc, d'après **I.3**, $(x_i)_{i \in I_n}$ est aussi sommable. De plus, les I_n étant deux à deux disjoints, $\sum_{n \leq N} \sum_{i \in I_n} x_i = \sum_{i \in \bigcup_{n \leq N} I_n} x_i \leq \sum_{i \in I} x_i$ d'après **I.3** car $\bigcup_{n \leq N} I_n \subset I$. La somme partielle de la

SATP $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right)$ est donc majorée par $\sum_{i \in I} x_i$ donc la série converge et on a $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) \leq \sum_{i \in I} x_i$.

2. Dans le cas général, la sommabilité se prouve en appliquant ce qui vient d'être fait à la famille positive $(|x_i|)_{i \in I}$
3. Dans le cas réel, l'égalité sur les sommes se prouve en appliquant le premier point aux familles $(x_i^+)_{i \in I}$ et $(x_i^-)_{i \in I}$. Dans le cas complexe, avec les parties réelles et imaginaires de x_i .

Théorème [I.9] : (Théorème de Fubini)

Soit $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une famille de $\mathbb{K}$ indicée par $I \times J$, avec I et J au plus dénombrables.

Alors $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable si et seulement si $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} |x_{i,j}| \right) < +\infty$

Dans ce cas, on a

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} x_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} x_{i,j} \right)$$

Preuve :

On introduit une énumération de I : $I = \{i_n, n \in \mathbb{N}\}$ et on pose $I_n = \{(i_n, j), j \in J\}$ qui constitue une partition de $I \times J$ (si I est finie, on a $I = \{i_n, n \leq N\}$ et on complète la partition avec des ensembles $I_n = \emptyset$ pour $n > N$). On applique alors **I.8** : $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable si et seulement si $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(i,j) \in I_n} |x_{i,j}| < +\infty$ mais $\sum_{(i,j) \in I_n} |x_{i,j}| = \sum_{j \in J} |x_{i_n, j}|$

donc $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{(i,j) \in I_n} |x_{i,j}| = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |x_{i,j}|$.

En cas de sommabilité, l'égalité des sommes se prouve de la même façon (avec le théorème de sommation par paquets, avec la même partition, mais sans les modules).

Propriété [I.10] : Si $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_j)_{j \in J}$ sont deux familles sommables de $\mathbb{K}$ alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est sommable et

$$\left(\sum_{i \in I} x_i \right) \times \left(\sum_{j \in J} y_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j$$

Preuve :

On applique le théorème de Fubini à la famille $(y_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ avec $y_{i,j} = x_i x_j : \sum_{j \in J} |y_{i,j}| = |x_i| \sum_{j \in J} |x_j|$ car x_i est

indépendant de l'indice j , puis $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |y_{i,j}| = \left(\sum_{j \in J} |x_j| \right) \sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$ (la somme sur $j \in J$ ne dépend pas de l'indice

i). On a donc prouvé la sommabilité de $(y_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$.

L'égalité des sommes se prouve de même, avec le théorème de Fubini, en faisant le même calcul sans les modules.