

Intégrales dépendant d'un paramètre

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes. On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts.

Rappel : intégrales dépendant d'un paramètre entier

Théorème [1] : (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ une suite de fonctions. On suppose que :

- ▷ la suite (f_n) converge simplement sur I vers f .
- ▷ les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur I .
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de n** et intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n = \int_I f$$

I Continuité des intégrales à paramètres

On s'intéresse dans la suite de ce chapitre à des fonctions g , définies sur un intervalle A de $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_I f(x, t) dt,$$

où $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. L'intervalle d'intégration I est donc indépendant de x .

Tous les théorèmes qui suivent sont des conséquences du théorème de convergence dominée : ils comporteront donc tous une *hypothèse de domination* indispensable !

Théorème [1.1] : (Théorème de continuité)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Remarque(s) :

(I.1) L'hypothèse de domination se prouve en deux temps :

- On commence par déterminer φ **indépendante de x** telle que $\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$, en n'utilisant pour cela que les symboles $=$ et $\leq$.
- Puis on prouve que φ est continue par morceaux et intégrable sur I , en utilisant en général le théorème de comparaison (donc des symboles $\sim, o, O, \dots$)

Conséquence [I.2] : (Théorème de continuité avec domination locale)

Soit $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- ▷ pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est continue sur A .

Remarque(s) :

- (I.2) La conclusion de cette propriété est exactement la même que celle du théorème précédent alors que l'hypothèse de domination sur un segment est plus facile à obtenir ; on utilisera donc cette propriété plutôt que le théorème précédent pour prouver la continuité d'une telle fonction g .
- (I.3) Dans ces deux propriétés, l'intégrabilité de la fonction dominante φ redonne l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto f(x, t)$ sur I donc l'existence de $g(x)$.
- (I.4) Dans la conséquence, la fonction dominante φ peut dépendre de a et b mais elle doit être **indépendante de x** (la preuve de cette hypothèse de domination se fait donc à nouveau en deux temps).

Théorème [I.3] : (Théorème de convergence dominée à paramètre continu)

Soient $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et a une **borne de l'intervalle** A . On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x, t) = \ell(t)$.
- ▷ pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x, t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I .
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et

$$\lim_{x \rightarrow a} \int_I f(x, t) dt = \int_I \ell(t) dt$$

Remarque(s) :

- (I.5) Ce théorème est une extension du TCD où on remplace le paramètre entier n par un paramètre continu x .
- (I.6) Ce théorème sert à étudier le comportement de la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ aux bornes de son intervalle de définition A .
- (I.7) Pour appliquer ce théorème, a doit être **une borne de A** ce qui implique les deux remarques suivantes :
 - on ne peut pas se placer sur des segments de A pour trouver une domination.
 - on peut choisir l'intervalle A en fonction de la borne a à étudier : si on souhaite étudier la limite en $+\infty$ de g , qui est définie sur $]0, +\infty[$, on peut se placer sur $A = [1, +\infty[$ par exemple, ie **UN intervalle dont a est une borne**.

Exemple(s) :

(I.8) Étudier $h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{1+t}} dt$.

(I.9) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Calculer $f(x) + f(x+1)$ et en déduire des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

II Dérivation des intégrales à paramètres

Théorème [II.1] : (Théorème de dérivation)

Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- ▷ il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in A \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

(II.1) Là encore la dominante φ doit être **indépendante de x** .

Attention : Ne pas oublier de vérifier que, pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x, t) dt$ est intégrable sur I (ce qui prouve que la fonction g est définie sur A).

Conséquence [II.2] : (Théorème de dérivation avec domination locale)

Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On suppose que :

- ▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I .
- ▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
- ▷ pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \longmapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A et

$$\forall x \in A, g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

- (II.2) À nouveau, cette propriété donne la même conclusion que le théorème précédent alors qu'elle est plus facile à appliquer (la domination sur un segment est plus facile à obtenir) ; on appliquera donc plutôt cette propriété pour prouver la classe $\mathcal{C}^1$ d'une telle fonction g .
- (II.3) L'hypothèse de domination se prouve, comme à chaque fois, en deux temps : d'abord on majore $|f(x, t)|$ **indépendamment de x** pour trouver la fonction φ , puis on prouve que φ est intégrable (par comparaison).

Exemple(s) :

(II.4) Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt$.

(II.5) Calculer, pour $x \geq 0$, $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x + t^2)}{1 + t^2} dt$.

(II.6) Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{1+t^2} dt$

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer $f'(x)$ pour $x > 0$.

b) En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1} dt$ puis de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$

Conséquence [II.3] : Soient $f : A \times I \rightarrow \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

▷ pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A .

▷ pour tout $x \in A$ et pour $0 \leq p \leq k-1$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t)$ sont continues par morceaux et intégrables sur I .

▷ pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur I .

▷ pour tout segment $[a, b] \subset A$, il existe une fonction $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue par morceaux, **indépendante de x** et intégrable sur I telle que

$$\forall (x, t) \in [a, b] \times I, \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $g : x \in A \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur A et, pour $1 \leq p \leq k$, on a

$$\forall x \in A, g^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x, t) dt$$

Remarque(s) :

(II.7) La notation $\frac{\partial^0 f}{\partial x^0}$ désigne en fait la fonction f elle-même.

(II.8) Cette propriété redonne la propriété précédente (classe $\mathcal{C}^1$) dans le cas $k = 1$.

(II.9) Au risque de se répéter : la dominante φ doit être **indépendante de x** , mais elle peut dépendre de a, b et k .

Exemple(s) :

(II.10) Étude de la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

(II.11) Transformée de Fourier : soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $x \mapsto x^k f(x)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$ fixé).

On pose $\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} dt$ (la transformée de Fourier de f).

a) La fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

b) Exemple du calcul de la transformée de Fourier d'un « créneau » et de $t \mapsto e^{-t^2}$.

(II.12) Transformée de Laplace : soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$ telle $x \mapsto f(x) e^{-\alpha x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ($\alpha \in \mathbb{R}$ fixé).

On pose $L_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ (la transformée de Laplace de f)

a) La fonction L_f est continue sur $[\alpha, +\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $] \alpha, +\infty[$.

b) Exemple du calcul de la transformée de Laplace de $t \mapsto t^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et $t \mapsto e^{zt}$ avec $z \in \mathbb{C}$.

c) On a $\lim_{p \rightarrow +\infty} L_f(p) = 0$.

d) Si f admet une limite finie en $+\infty$ alors $\lim_{p \rightarrow 0^+} p L_f(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (théorème de la valeur finale).