

TD14 : Espaces préhilbertiens

Exercice 1 (Mines-Télécom PSI 2024)

Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(a)Q^{(k)}(a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ fixé

1. Montrer que $(|)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$
2. Montrer que $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(a) = 0\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$; déterminer $\dim(E)$ et $d(1, E)$. (*)
3. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_n[X]$. (*)

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soient $E = \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$, $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E, f = f''\}$.

1. Montrer que $(f|g) = \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) dt$ est un produit scalaire sur E .
2. V et W sont-ils orthogonaux? Supplémentaires orthogonaux? (*)

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, tel que $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$

1. Développer $(f(x+y)|x+y)$
2. En déduire une relation entre $(f(x)|y)$ et $(f(y)|x)$
3. Si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, montrer que $\lambda = 0$. f est-il diagonalisable?
4. Montrer que $(\ker f)^\perp = \text{Im}(f)$
5. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale adaptée à la décomposition $E = \ker(f) \oplus \text{Im}(f)$. Que dire de la matrice de f dans $\mathcal{B}$?

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + z + t = x - y - z + t = 0\}$.

1. Montrer que F est un plan de $\mathbb{R}^4$ et en déterminer une base.
2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur F (pour le produit scalaire usuel).
3. Soit $u = (1, 2, 3, 4)$. Déterminer $d(u, F^\perp)$.

Exercice 5 (Mines-Ponts PC 2012)

Calculer $\min_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (t - \alpha t^2 - \beta)^2 e^{-t} dt$

Exercice 6 (CCINP PSI 2024)

1. Montrer que $(A|B) = \text{Tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sev de E et déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
3. Calculer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $F^\perp$.

Exercice 7 (CCINP PSI 2023)

On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \sum_{k=0}^n p_k q_k$ où (p_k) et (q_k) sont les coefficients de P et Q .

Déterminer la projection orthogonale de 1 sur $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$. (*)

Exercice 8 (CCINP PSI 2024)

1. Montrer que $\langle A, B \rangle = \int_0^{+\infty} A(t)B(t)e^{-t} dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ et que $\forall k \in \mathbb{N}, \langle X^k, 1 \rangle = k!$
2. Soit Q le projeté orthogonal de 1 sur $F = \text{Vect}\{X, X^2, \dots, X^n\}$. Montrer que $\exists (a_k)_{1 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^n, Q = \sum_{k=1}^n a_k X^k$.
3. Soit $P = 1 - \sum_{k=1}^n a_k (X+1)(X+2)\dots(X+k)$; calculer $\langle 1 - Q, X^i \rangle$ et montrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(i) = 0$.
4. Montrer que $\inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \frac{1}{n+1}$

Indications

Exercice 1

2. Commencer par définir E à l'aide du produit scalaire et trouver un vecteur normal à E .
3. Penser à la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 2

2. Utiliser une base de W .

Exercice 7

Commencer par définir F à l'aide du produit scalaire et trouver un vecteur normal à F .