

I Continuité

Exercice 1 (CCP PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+x^3+t^3}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Trouver (a, b, c) tel que $\frac{1}{1+t^3} = \frac{a}{1+t} + \frac{bt+c}{1-t+t^2}$ et déterminer $f(0)$.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Exercice 2 (CCINP PSI 2024) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$
3. Montrer que $f(x) = xf(x-1)$ pour $x \geq 1$

On pose $v_n = \int_{n-1}^n \ln(f(u)) du$ pour $n \geq 1$ et $\varphi(x) = \int_{x-1}^x \ln(f(u)) du$ pour $x \geq 1$.

1. Montrer que φ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et donner φ'
2. Montrer que $\varphi'(x) = \ln(x)$ pour $x \geq 1$
3. Déterminer la limite de φ en $+\infty$
4. En déduire la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{v_n}$

Exercice 3 (Mines-Ponts PSI 2024) [Solution]

Soient $\alpha > 0$ et $I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x^\alpha + t^4}$

1. Montrer que I est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Trouver les limites et des équivalents de I en 0 et $+\infty$.
indication : pour l'équivalent en 0, poser $u = x^{-\alpha/4}t$

Exercice 4 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$.

1. Déterminer le domaine de définition D de f .
2. Montrer que f est continue sur D .
3. Montrer que si $x \in D$ alors $1-x \in D$ et $f(x) = f(1-x)$
4. Déterminer la limite de f aux bornes de D .

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+e^t} dt$

1. Déterminer l'ensemble de définition de φ et étudier sa continuité
2. Montrer que, pour $x > 1$, $\varphi(x) = \Gamma(x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$ où $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 6 (CCP PSI 2022) [Solution]

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{te^{-tx}}{e^t - 1} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Pour tout $x > 0$, calculer $f(x-1) - f(x)$.
En déduire une expression de f sous la forme d'une série de fonctions.

4. Proposer une autre méthode pour décomposer $f(x)$ en somme de série ; obtient-on la même série ?

Exercice 7 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]

Déterminer le domaine de définition et la limite en $+\infty$ de $f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^x)^{1/x}}$.

Exercice 8 (Mines-Ponts PC 2006) [Solution]

Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \arctan t \, dt$ est définie. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 9 (Mines-Ponts PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que si $u \geq 0$, $0 \leq 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u} \leq u^3$
3. Montrer que f admet un $DL_5(0)$

Exercice 10 (Mines-Ponts PSI 2010) [Solution]

Ensemble de définition, continuité, monotonie et équivalent en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+(xt)^2} \, dt$?
indication : poser $u = xt$ pour l'étude en $+\infty$.

Exercice 11 (Centrale PSI 2016) [Solution]

1. Montrer la convergence, pour $x > 0$ de $f(x) = \int_{-x}^x \frac{dt}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
indication : pour toute la suite de l'exercice, poser $t = xu$; pour la limite, TCD.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 12 (Mines-Ponts PC 2009) [Solution]

On note E l'ensemble des fonctions continues sur $]0, +\infty[$ telles que $\forall s > 0$, $\frac{f(u)}{u+s}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. Comparer E à l'ensemble L des fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$ du point de vue de l'inclusion.
2. Pour quelles valeurs de α , f_α définie par $f_\alpha(u) = u^{\alpha-1}$ est-elle dans E ?
3. Montrer que $\hat{f}_\alpha(s) = \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u} \, du$ est proportionnelle à $f_\alpha(s)$.
4. Montrer que $\hat{f} : s \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(u)}{s+u} \, du$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, si $f \in E$, et donner sa limite en $+\infty$.

II Classe $\mathcal{C}^1$ et plus

Exercice 13 (CCP PSI 2017) [Solution]

1. Montrer que le domaine de définition de $g(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{t} \, dt$ contient $] -1, 1[$.
2. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, 1[$ et calculer $g'(x)$ de deux façons différentes.
indication : $u = xt$ pour une des deux méthodes.

Exercice 14 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit F la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+x^2} \, dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 15 [Solution]

Calculer (en dérivant) : $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t} \, dt$

Exercice 16 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} \cos(xt) \, dt$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur D

2. Calculer f' puis f .

indication : Pour trouver la constante d'intégration, on peut faire une IPP (en primitivant $\cos(xt)$)

Exercice 17 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \operatorname{sh} t}{t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g .
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $g'(x)$.
3. Déterminer la limite de la suite $(g(n))_{n \geq 0}$
4. En déduire la valeur de $g(x)$

Exercice 18 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$

1. Montrer que φ est définie sur $\mathbb{R}$
2. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
3. Calculer φ' puis φ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 19 (Mines-Télécom PSI 2024) [Solution]

Soient $x > -1$ et $f(x) = \int_0^{\pi/2} \ln(1 + x \sin^2 t) dt$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $] -1, +\infty[$
2. Calculer $f'(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{\tan t}$
3. En déduire la valeur de f

Exercice 20 (CCP PSI 2013) [Solution]

Après avoir démontré son existence, calculer $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt^2}}{t^2} dt$, sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (on pourra montrer que F est dérivable).

Exercice 21 (Mines-Télécom PSI 2017) [Solution]

Soit $g(x) = \int_0^1 t^x \frac{t-1}{\ln t} dt$

1. Montrer que g est définie sur $D =] -1, +\infty[$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et en trouver une expression simple.

Exercice 22 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Existence et calcul de $T(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

Exercice 23 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + \operatorname{ch} t}$.

1. Montrer que f définie sur $] -1, +\infty[$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer l'existence et déterminer la valeur de la limite de f en $+\infty$

Exercice 24 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]

Étudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité de $\varphi(x) = \int_0^1 t^x \ln(1-t) dt$.

Exercice 25 (ENSAM PSI 2018) [Solution]

On pose $f_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^n}$, pour $n \geq 1$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f_n et calculer f_1 .
2. Montrer que f_n est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et trouver une relation entre f_{n+1} et f'_n .
3. Déterminer f_n .

Exercice 26 (CCP PSI 2013) [Solution]

1. Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
2. Soient $F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. Montrer que $F + G^2$ est constante.
3. Déterminer la limite de F en $+\infty$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 27 (ENSAM PSI 2015) [Solution]

1. Continuité et dérivabilité de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$?
2. Exprimer f en fonction de $g(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.
3. Déterminer $\lim_{+\infty} f$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Exercice 28 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire
2. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$
3. Vérifier, pour $x \neq 1$, $\frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right)$ et en déduire la valeur de $g'(x)$ pour $x \geq 0$.
4. Montrer que $g(x) = \frac{\pi}{2} \ln(1+x)$ pour $x \geq 0$.
5. Calculer $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 29 (CCEM PSI 2024) [Solution]

On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2} dt$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
3. Calculer $f'(x)$ puis $f(x)$.

Exercice 30 (Mines-Ponts PSI 2024) [Solution]

1. Montrer, pour $x \in [0, 1]$, que $\int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt = \frac{\ln 2}{2} \arctan x + \frac{\pi}{8} \ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$
2. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$

Exercice 31 (Centrale PC 2015) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2} dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. En déduire que, pour $x \in [0, 1[$, $f(x) = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt$; calculer $\int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1}$.

Exercice 32 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x}$

1. Trouver le domaine de définition D de F .
2. Montrer que F est continue sur D .
3. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur un domaine à préciser et, à l'aide d'un changement de variable, que $F'(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)t^x}{(1+t^x)^2} \left(\frac{1}{t^2} - 1 \right) dt$.
En déduire les variations de F .
4. Déterminer les limites de F en $+\infty$ et en 1.

Exercice 33 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t} dt$ pour $y > 0$

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer F' .
2. En déduire la valeur de F .

Exercice 34 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $I = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$

1. Montrer que I existe
2. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

indication : pour $\mathcal{C}^0$, écrire $f(x) = I - \sum_{n \geq 0} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t} \sin(t) dt$ et vérifier la CVU de la série de fct

3. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire la valeur de I .

Exercice 35 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Soient $a, b > 0$ distincts et $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt$

1. Montrer que F est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $F(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2} + C$
3. Montrer que $F(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{+\infty} h'(t) \sin(xt) dt$ où $h(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$ et en déduire la valeur de C .

Exercice 36 (ICNA PSI 2010) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-\arctan(xt)}}{2 + t^2} dt$ est définie pour tout $x \geq 0$.

2. Montrer que $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$ et calculer $f(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.

Exercice 37 (Mines-Ponts PSI 2022) [Solution]

Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $f(x) = \int_0^1 \cos\left(\frac{\pi t}{x+t}\right) dt$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Calculer $f(0)$ et $\lim_{+\infty} f$

3. En utilisant les deux changements de variable $u = x + t$ puis $v = \frac{x\pi}{u}$, montrer que f est dérivable en 0.

indication : c'est sur $f'(x)$ qu'il faut faire ces chgt de variable

Exercice 38 (Centrale PSI 2013) [Solution]

1. Déterminer l'ensemble de définition et les variations de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition et déterminer la limite de f en 0.

3. f est-elle intégrable sur $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$?

Exercice 39 (CCINP PSI 2024) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt} dt$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

4. Calculer les limites en $+\infty$ de f et f'

5. Montrer que, pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

6. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ puis déterminer sa valeur.

Exercice 40 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}} dt$ est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Calculer la limite et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 41 (Centrale PC 2015) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2} dt$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{itx}}{1+t^2} dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
indication : relier g à f' .

Exercice 42 (AADN PSI 2009) [Solution]

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Calculer f'' puis f .

Exercice 43 (Centrale PSI 2016) [Solution]

1. Montrer que f , définie pour $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est $\mathcal{C}^2$.
2. Trouver un équivalent de f en $+\infty$, puis en 0.
indication : poser $g(x) = xf(x)$, la limite de g en $+\infty$ se calcule avec le TCD. Pour l'équivalent en 0 : montrer que $g''(x) + \frac{1}{x}$ converge en 0 puis que $g'(x) + \ln(x)$ converge en 0 avant de revenir à $g(x)$.

Exercice 44 (ENSAM PSI 2007) [Solution]

Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(tx)}{1+t^2} dt$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer $f(0)$, $f(x)$ et la limite de f en $+\infty$.

Exercice 45 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^1 \frac{t^x \ln(t)}{t-1} dt$ existe pour $x \in D =]-1, +\infty[$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur D .

Exercice 46 (Mines-Télécom PSI 2018) [Solution]

Calculer, pour $x > 0$, $I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos^2 t + x \sin^2 t}$ et $J(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} dt$; on pourra poser $u = \tan(t)$ pour calculer $I(x)$.

Exercice 47 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $F(a) = \int_0^\pi \sin(a \sin t) dt$

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$
2. Déterminer $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} F(a)$.

Exercice 48 (CCINP PSI 2021) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt^2) e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE?

Exercice 49 (CCP PSI 2010) [Solution]

Soit f continue sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$; on pose $F(x) = \left(\int_0^1 (f(t))^x dt \right)^{1/x}$ et $G(x) = \int_0^1 (f(t))^x dt$. Calculer $\frac{1}{x} (\ln G(x) - \ln G(0))$ et en déduire que F admet une limite en 0 à déterminer.

III Équations différentielles

Exercice 50 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

1. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres
2. Montrer que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{ch}(xt)e^{-t^2} dt$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f est la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(0)$.

Exercice 51 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable et vérifie une équation différentielle du premier ordre sur $\mathbb{R}$.
3. Résoudre cette équation et en déduire une expression simple de f ; on donne $f(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 52 (CCP PSI 2018) [Solution]

Soit $f(t) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-x^2} dx$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(t)$.
3. Déterminer $f(t)$ sachant $f(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
4. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(t)$.

Exercice 53 (CCP MP 2015) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$.

1. Montrer que f vérifie sur $\mathbb{R}^{+*}$ une équation différentielle d'ordre 1.
2. Déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

Exercice 54 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. En déduire la valeur de f ; on donne $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 55 (CCINP PSI 2024) [Solution]

Soit $b > 0$. On pose : $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{t}}}{\sqrt{t}} e^{-bt} dt$ pour $x > 0$.

1. I est-elle bien définie ? Continue ? Que dire de $I(0)$?
2. Montrer que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Montrer que pour $x > 0$, $I(x) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2} du$ et $I'(x) = \int_0^{+\infty} -2 \frac{e^{-\frac{x}{u^2}} e^{-bu^2}}{u^2} du$.
4. Montrer à l'aide d'un changement de variable judicieux que $\forall x > 0, I'(x) = -\sqrt{\frac{b}{x}} I(x)$
5. En déduire l'expression de I .

Exercice 56 (CCP PC 2015) [Solution]

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{x+t} dt$.

1. Montrer que $F(x)$ n'existe que pour $x > 0$ et déterminer la limite de F en $+\infty$.
2. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $2xF(x) - F'(x) = \frac{2}{x}$.
En déduire que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que $F(x) = 2e^{x^2} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ et en déduire que $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2 \ln(x)$.

Exercice 57 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soient $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt$ et $G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1+t^2)^2} dt$.

1. Montrer que F est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $F(0)$
2. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$
3. Montrer que $F(x) = x \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2} dt$ si $x > 0$
4. En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $F'(x) = \frac{F(x) - 2G(x)}{x}$ pour $x > 0$
5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $G'(x) = -\frac{x}{2}F(x)$
6. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par F et en déduire la valeur de F

Exercice 58 (ENSAM PSI 2013) [Solution]

1. Montrer que $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Trouver une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par g et en déduire que, pour $x > 0$, on a :

$$g(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt.$$

Exercice 59 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$

1. Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $y'' + y = \frac{1}{x}$
3. Montrer que f est l'unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de cette équation différentielle, telle que $\lim_{+\infty} y = 0$

Exercice 60 (CCP PSI 2010 partiel) [Solution]

Montrer que $f(x) = \int_0^\pi \cos(x \cos t) dt$ est $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$.

Exercice 61 (CCP PSI 2009) [Solution]

1. Montrer que f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-xt} dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (sur ?).
2. Montrer qu'il existe une constante c telle que $f(x) = \frac{c - \ln x}{x}$. (on pourra étudier $f(x) + xf'(x)$)

Exercice 62 (CCP PSI 2011) [Solution]

1. Trouver l'ensemble de définition D de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$.
2. Montrer que f est continue sur D puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que, pour $x > 0$, $f(x) - f''(x) = ax + b$ (on ne cherchera pas à calculer a) puis calculer f .

Exercice 63 (ENSEA-ENSIIE PSI 2014) [Solution]

Soit $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Exprimer $F(t)$ en fonction de $\theta(t) = \int_0^t e^{-v^2} dv$; on donne $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par F .)

Exercice 64 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}} dt$.

1. Montrer que f est définie et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

indication : commencer par montrer que pour $\varepsilon > 0$, $|f(x)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}} dt$ avec une IPP.

3. Déterminer f à l'aide de fonctions usuelles (et de $f(0)$).

Exercice 65 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Montrer que $F_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin(xe^t) dt$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que pour $k \geq 2$, F_k est solution de $xy' - ky = -\sin(x)$.

IV Autres

Exercice 66 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

1. Étudier et représenter $f(x) = \int_0^{\pi/4} e^{-x \tan(t)} dt$
2. Étudier (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
3. f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^-$? et sur $\mathbb{R}^+$?

Exercice 67 (Centrale PSI 2024) [Solution]

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(xt) e^{-t} dt$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
2. Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. Par $\left| \frac{1}{1+t^3+x^3} \right| \leq \frac{1}{1+t^3}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

2. $\frac{1}{1+t^3} = \frac{1/3}{1+t} + \frac{-1/3t+2/3}{1-t+t^2} = \frac{1/3}{1+t} - \frac{1}{6} \frac{2t-1}{t^2-t+1} + \frac{2}{3} \frac{1}{1+\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)}$ donc $f(0) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

3. Si (x_n) tend vers $+\infty$ alors par TCD (même domination) $f(x_n)$ tend vers 0

Exercice 2 [sujet] 1. $f(x) = \Gamma(x+1)$ donc cf cours

2. cf cours

3. par IPP, cf cours

4. on a $f(x) > 0$ pour $x \geq 0$ donc $x \mapsto \ln(f(x))$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Ainsi, φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\varphi'(x) = \ln(f(x)) - \ln(f(x-1))$

5. $\varphi'(x) = \ln \frac{f(x)}{f(x-1)} = \ln(x)$ d'après Q.c

6. On en déduit $\varphi(x) = x \ln(x) - x + C \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

7. CSSA donc CV

Exercice 3 [sujet] 1. Si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ alors $|f(x, t)| \leq \frac{1}{t^4 + a^\alpha}$ intégrable sur le segment $[0, 1]$

2. En $+\infty$, le TCDPC s'applique avec $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^4}$ si $x \geq 1$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(x) = 0$. Puis $I(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^1 \frac{dt}{1+x^{-\alpha}t^4}$ donc $x^\alpha I(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \int_0^1 dt = 1$ par TCDPC avec $\left| \frac{1}{1+x^{-\alpha}t^4} \right| \leq 1$.

En 0, on trouve directement un équivalent : $I(x) = \frac{1}{x^\alpha} \int_0^1 \frac{1}{1+x^{-\alpha}t^4} \stackrel{u=x^{-\alpha/4}t}{=} \frac{1}{x^\alpha} \int_0^{x^{-\alpha/4}} \frac{x^{\alpha/4} du}{1+u^4}$ donc $x^{3\alpha/4} I(x) = \int_0^{x^{-\alpha/4}} \frac{du}{1+u^4} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} > 0$ et $I(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x^{3\alpha/4}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}$

Exercice 4 [sujet] 1. $g(x, t) = \frac{1}{t^x(1+t)} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^x}$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{x+1}}$ donc $D =]0, 1[$.

2. $|g(x, t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{t^b(1+t)} & \text{si } t \leq 1 \\ \frac{1}{t^a(1+t)} & \text{si } t > 1 \end{cases}$ si $x \in [a, b] \subset D$.

3. Poser $u = \frac{1}{t}$.

4. $f(x) \geq \int_0^1 g(x, t) dt \geq \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{2(1-x)} \xrightarrow{x \rightarrow 1} +\infty$; idem en 0 avec $f(x) = f(1-x)$.

Exercice 5 [sujet] 1. $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2t^{1-x}}$ donc $D_\varphi = \mathbb{R}^{+*}$

φ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car, si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x, t)| \leq f(a, t) + f(b, t)$ (distinguer $t \geq 1$ et $t < 1$)

2. $f(x, t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{x-1} e^{-(n+1)t}$ si $t > 0$ puis TITT avec $\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-(n+1)t} dt \stackrel{u=(n+1)t}{=} \frac{1}{(n+1)^x} \Gamma(x)$ donc $\sum \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ CV pour $x > 1$.

3. On vérifie (cf cours) que Γ et $\theta : x \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ sont continues sur $[1, +\infty[$ donc la relation précédente reste valable

en $x = 1$. Comme $\Gamma(1) = 1$, on a $\theta(1) = \varphi(1) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} dt = \ln 2$

Exercice 6 [sujet] 1. Si $f(x, t) = \frac{te^{-xt}}{e^t - 1}$, $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} te^{-(x+1)t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > -1$ alors que si $x \leq -1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(x, t) = +\infty$ donc $D_F =]-1, +\infty[$.

2. On a $0 \leq f(x, t) \leq e^{-xt}$ donc pour $x > 0$, $0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ et $\lim_{+\infty} F = 0$.

3. $F(x-1) - F(x) = \int_0^{+\infty} te^{-xt} dt = \frac{1}{x^2}$ et par télescopage, $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (F(x+n) - F(x+n+1)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+x+1)^2}$
4. Par TITT avec $f(x, t) = \sum_{n \geq 0} te^{-(x+n+1)t}$ et $\int_0^{+\infty} |e^{-(x+n+1)t}| dt = \frac{1}{(n+1+x)^2}$.

Exercice 7 [sujet] $t \mapsto g(x, t) = \exp \left[-\frac{1}{x} \ln(1-t^x) \right]$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0, 1[$ si $x > 0$; au voisinage de $t = 1$, on a $t^x = e^{x \ln(t)} = e^{x((t-1)+o(t-1))} = 1 + x(t-1) + o(t-1)$ donc $\ln(1-t^x) = \ln(x(1-t) + o(1-t)) = \ln(1-t) + \ln(x) + o(1)$ et $g(x, t) = \exp \left[-\frac{1}{x} \ln(1-t) - \frac{\ln x}{x} + o(1) \right] \sim \frac{x^{-1/x}}{(1-t)^{1/x}}$ donc $D_f =]1, +\infty[$.

Si (x_n) tend vers $+\infty$, $u_n(t) = g(x_n, t) = \exp \left[-\frac{1}{x_n} \ln(1-t^{x_n}) \right] = \exp \left[\frac{1}{x_n} t^{x_n} (1 + o(1)) \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$ pour $t \in]0, 1[$ donc (u_n) CS vers 1 et, avec $|u_n(t)| \leq 1$, par TCD, on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 8 [sujet] 1. Pour la définition et la continuité : si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $|e^{-xt} \arctan t| \leq \arctan(t) e^{-at} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ car $0 \leq \varphi(t) \leq \frac{\pi^{-at}}{e}$ et $a > 0$.

2. $f(x) \stackrel{u=xt}{=} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \arctan \left(\frac{u}{x} \right) e^{-u} du$ et on vérifie que $\lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2} e^{-t} dt = \frac{\pi}{2}$ par TCD : si (x_n) est une suite tendant vers 0 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \arctan \left(\frac{u}{x_n} \right) = \frac{\pi}{2}$ si $u > 0$ puis $\left| \arctan \left(\frac{u}{x_n} \right) e^{-u} \right| \leq e^{-u}$ donne la domination.

Exercice 9 [sujet] 1. $\left| \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2} \right| \leq e^{-t^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier $u \mapsto 1 - u + u^2 - \frac{1}{1+u}$ et $u \mapsto u^3 - u^2 + u - 1 + \frac{1}{1+u}$

3. $0 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (1-x^2t^2+x^4t^4)e^{-t^2} dt - f(x) \leq x^6 \int_{-\infty}^{+\infty} t^6 e^{-t^2} dt$ donc $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} dt - x^2 \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-t^2} dt + x^4 \int_{\mathbb{R}} t^4 e^{-t^2} dt + O(x^6)$

Exercice 10 [sujet] $\left| \frac{e^{-t}}{1+(xt)^2} \right| \leq e^{-t}$ permet de justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$; de plus f est paire et décroissante sur $\mathbb{R}^+$; on pose $u = xt$ (avec $x > 0$) : $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u/x}}{1+u^2} du$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}$ par TCD avec $\left| \frac{e^{-u/x_n}}{1+u^2} \right| \leq \frac{1}{1+u^2}$

Exercice 11 [sujet] 1. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $] -x, x[$ et $\frac{1}{\sqrt{(1+t^2)(x^2-t^2)}} \underset{t \rightarrow x}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2x(1+x^2)(x-t)^{1/2}}}$ donc est intégrable sur $[0, x[$ et sur $] -x, 0]$ par parité.

2. $f(x) = \int_{-1}^1 \frac{du}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}}$ et si (x_n) tend vers $+\infty$, on a $\left| \frac{1}{\sqrt{(1+(ux_n)^2)(1-u^2)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ donc $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par TCD

3. Sous la seconde forme, f est continue en 0 par $\left| \frac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$. Pour le DSE, on part du DSE de $(1+u)^{1/2}$ pour obtenir $\frac{1}{\sqrt{(1+(ux)^2)(1-u^2)}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} x^{2n}$ pour $|x| < 1$ et $u \in]-1, 1[$ et on applique le TITT : $\int_{-1}^1 \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}} x^{2n} du \leq \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \pi \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^{2n}$ qui est le terme général d'une série CV car $|x| < 1$.

Exercice 12 [sujet] 1. On a $L \subset E$ car, pour $s > 0$ fixé, on a $|f(u)| \leq s \frac{|f(u)|}{u+s}$. Par contre les ensembles ne sont pas égaux puisque $u \mapsto \frac{1}{u} \notin L$ alors que $u \mapsto \frac{1}{u} \in E$ car $u \mapsto \frac{1}{u(u+s)}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et équivalente à $\frac{1}{u^2}$ en $+\infty$.

2. $u \mapsto \frac{f_\alpha(u)}{s+u}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et $\frac{f_\alpha(u)}{s+u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{u^{2-\alpha}}$ donc $f_\alpha \in E$ si et seulement si $\alpha > 0$.

$$3. \hat{f}_\alpha(s) \stackrel{u=st}{=} s^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

4. Pour $s \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left| \frac{f(u)}{s+u} \right| \leq \frac{|f(u)|}{u+a} = \varphi(u)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $a > 0$ et $f \in E$, ce qui donne la continuité de $\hat{f}$.

Pour la limite en $+\infty$, on applique le TCD : si (s_n) tend vers $+\infty$ alors $\frac{f(u)}{s_n+u} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $\left| \frac{f(u)}{s_n+u} \right| \leq \frac{|f(u)|}{1+u} = \varphi(u)$ car $x_n \geq 1$ à partir d'un certain rang. Comme φ est intégrable si $f \in E$, on en déduit (par caractérisation séquentielle de la limite) que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \hat{f}(s) = 0$.

Exercice 13 [sujet] 1. Si $|x| < 1$, $t \mapsto f(x, t) = \frac{\ln(1+xt)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]0, 1]$ et $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = x$ est finie.

2. Si $x \in [-a, a] \subset]-1, 1[$ alors $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{|1+xt|} \leq \frac{1}{1-at}$ donne $g'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+xt} = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Pour la deuxième méthode, avec $u = xt$, $g(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+u)}{u} du$ donc g est la primitive nulle en 0 de $h : x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ (car h est prolongeable par continuité en 0).

Exercice 14 [sujet] $f(x, t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$; si $x > 0$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. On applique le th de dérivation avec $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x|\ln t|}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{2b|\ln t|}{(a^2+t^2)^2} \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

Exercice 15 [sujet] Si $f_1(x, t) = \frac{e^{-t} - e^{-tx}}{t}$ alors $t \mapsto f_1(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$ (prolongeable par continuité en 0 et $o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$) et si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left| \frac{\partial f_1}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ donne $g'_1(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $g_1(x) = \ln(x) + C$ et $C = 0$ car $g_1(1) = 0$.

Exercice 16 [sujet] 1. $D = \mathbb{R}$ car $g(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et $g(x, t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = |(e^{-2t} - e^{-t}) \sin(xt)| \leq e^{-t} + e^{-2t}$

2. $f'(x) = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-2t+ixt} - e^{-t+ixt} dt \right) = \frac{x}{4+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$ donc $f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{4+x^2}{1+x^2} + C$.

Si $\varphi(t) = \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t}$ alors φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ (car DSE par ex) puis, par IPP, $|f(x)| = \frac{1}{x} \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(t) \sin(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\varphi'(t)| dt$ (vérifier que φ' est intégrable sur $\mathbb{R}^+$) donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ et $C = 0$.

Exercice 17 [sujet] 1. $f(x, t) = \frac{e^{-xt} \text{sh } t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$ et $f(x, t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-(x-1)t}}{2t}$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si et seulement si $x-1 > 0$. Comme $f \geq 0$, on a $D_f =]1, +\infty[$

2. si $x \in [a, b] \subset]1, +\infty[$, on a $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt} \text{sh}(t) \leq e^{-at} \text{sh}(t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} e^{-(a-1)t}$ donne $g'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \text{sh}(t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$

3. $|f(n, t)| \leq \frac{e^{-2t} \text{sh}(t)}{t}$ si $n \geq 2$ et le TCD donne $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$.

4. $g(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) + C$ et $C = 0$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(n) = 0$

Exercice 18 [sujet] 1. $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} x$ et $f(x, t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-t}$

3. $\varphi'(x) = \text{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt \right) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi(0) = 0$ donc $\varphi(x) = \arctan(x)$

Exercice 19 [sujet] 1. si $x > -1$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue donc intégrable sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ puis, si $x \in [a, b] \subset]-1, +\infty[$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{\sin^2 t}{1+x \sin^2 t} \leq \frac{\sin^2 t}{1+a \sin^2 t}$ intégrable car continue sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2. $u \mapsto \arctan \frac{1}{u}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective et strictement décroissante de $]0, +\infty[$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, puis $dt = -\frac{du}{1+u^2}$ et $\frac{1}{\sin^2} = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin^2} = 1 + \frac{1}{\tan^2}$ donc $f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u^2+1+x)(1+u^2)} \stackrel{x \neq 0}{=} \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+u^2} - \frac{1}{1+x+u^2} \right) du$ donc $f'(x) = \frac{1}{x} \left[\arctan u - \frac{1}{\sqrt{1+x}} \arctan \frac{u}{\sqrt{1+x}} \right]_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{\pi(\sqrt{1+x}-1)}{x\sqrt{1+x}} = \frac{\pi}{\sqrt{1+x}(1+\sqrt{1+x})}$ qui est aussi valable en 0 par continuité de f'

3. Comme $f(0) = 0$, on trouve $f(x) = \pi \ln \left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2} \right)$

Exercice 20 [sujet] Si $f(x, t) = \frac{1-e^{-xt^2}}{t^2}$ alors $t \mapsto f(x, t)$ est prolongeable par continuité en 0 et $|f(x, t)| \leq \frac{1}{t^2}$ si $x \geq 0$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^+$ (et pas sur $\mathbb{R}^{-*}$ car $f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} -\infty$ si $x < 0$). La classe $\mathcal{C}^1$ de F sur $\mathbb{R}^{+*}$ provient de $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{-xt^2} \leq e^{-at^2}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$; on a $F'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ (en posant $u = t\sqrt{x}$). On en déduit $F(x) = \sqrt{\pi x} + C$, si $x > 0$, et on trouve $C = 0$ car $F(0) = 0$ et F est continue en 0 par $|f(x, t)| \leq f(b, t)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 21 [sujet] 1. Si $f(x, t) = t^x \frac{t-1}{\ln t}$ alors $\lim_{t \rightarrow 1} f(x, t) = 1$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{t^{-x} \ln(t)}$ (Bertrand) donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $-x < 1$ (et $f \geq 0$)

2. Si $x \in [a, b] \subset]-1, +\infty[$ alors $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = t^x - t^{x+1} \leq t^a$. On a $g'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$ puis $g(x) = \ln \left(\frac{x+2}{x+1} \right) + C$ et $C = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$: $t \mapsto \frac{t-1}{\ln(t)}$ est bornée sur $]0, 1[$ (car prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$) donc $|g(x)| \leq M \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}$.

Exercice 22 [sujet] $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = ix$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t})$ donc T est définie sur $\mathbb{R}$.

$T'(x) = i \int_0^{+\infty} e^{-(1-ix)t} dt = \frac{i}{1-ix}$ car $|e^{-(1-ix)t}| = e^{-t}$. Comme $T(0) = 0$, on trouve $T(x) = i \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$.

Exercice 23 [sujet] 1. $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-t}$ donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si $x > -1$

2. $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{\text{ch } t}{(x + \text{ch } t)^2} \leq \frac{\text{ch } t}{(a + \text{ch } t)^2}$ si $x \in [a, b] \subset]-1, +\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 2e^{-t}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0$ car $|g(x, t)| \leq g(0, t)$ si $x \geq 0$

Exercice 24 [sujet] Si $f(x, t) = t^x \ln(1-t)$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \ln(1-t)$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-1}{t^{-(x+1)}}$ donc φ est définie sur $] -2, +\infty[$. φ est $\mathcal{C}^1$ sur ce domaine car $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = |\ln(t)f(x, t)| \leq t^a |\ln(t) \ln(1-t)| \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{-a/2}}\right)$ si $[a, b] \subset] -2, +\infty[$ et $-a/2 < 1$.

Exercice 25 [sujet] 1. f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ (et paire) car $t \mapsto \frac{1}{(x^2+t^2)^n}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ si $x \neq 0$ et $\underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$ (et

$$f_n(0) \text{ n'existe pas}; f_1(x) = \frac{\pi}{2|x|}$$

2. $f'_n(x) = -2nx f_{n+1}(x)$ car si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left| \frac{-2nx}{(x^2+t^2)^{n+1}} \right| \leq \frac{2nb}{(a^2+t^2)^{n+1}}$

3. On trouve (récurrence) $f_n(x) = \frac{(2n-2)!}{(2^{n-1}(n-1)!)^2} \times \frac{\pi}{2x^{2n-1}}$

Exercice 26 [sujet] 1. $\underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. G est la primitive sur $\mathbb{R}$ nulle en 0 de $t \mapsto e^{-t^2}$ (continue sur $\mathbb{R}$). Pour F : si $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc F est continue sur $\mathbb{R}$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 1$ donne $F \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^1 e^{-u^2} du$ ($u = xt$) pour $x > 0$. On en déduit $F + G^2 = C$.

3. $0 \leq F(x) \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$, $C = I^2 = F(0) + G(0)^2 = \frac{\pi}{4}$ et comme $I \geq 0$, on a $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Exercice 27** [sujet] 1. Si $h(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ alors $|h(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}$ (et paire) et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq 2be^{-a^2(1+t^2)}$ si $[x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}]$ donne $f \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. $f'(x) = -2xe^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-(xt)^2} dt = -2Ie^{-x^2}$ si $I = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$ ce qui donne $f(x) = -2Ig(x) + C$ pour $x > 0$ puis $x \geq 0$ par continuité en 0.
3. $|f(x)| \leq e^{-x^2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ donc $C = 2I^2$ puis $f(0) = \frac{\pi}{2} = C$ donne $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

- Exercice 28** [sujet] 1. $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = x$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; impaire facile
2. g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ avec $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$
3. décomposition en éléments simples facile puis, si $x^2 \neq 1$, $g'(x) = \frac{1}{1-x^2} \left[\arctan(t) - x \arctan(xt) \right] \underset{t=0}{=} \underset{x \geq 0}{=} \frac{1}{1-x^2} \frac{\pi}{2} (1-x) = \frac{\pi}{2} (1+x)$ qui est aussi valable en $x = 1$ par continuité de g'
4. facile avec $g(0) = 0$ pour la constante d'intégration
5. $I = 2g(1)$ par IPP

- Exercice 29** [sujet] 1. Si $x \in [-a, a]$ alors $|g(x, t)| \leq g(a, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$
2. Si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{2b}{(1+t^2)(1+a^2t^2)} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2b}{a^2t^4}$
3. Pour $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{2x}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right) dt = \frac{\pi x}{1+x}$, qui reste valable pour $x = 1$ par continuité de f' en 1. On a alors $f(x) = \pi(x - \ln(1+x)) + C$ si $x > 0$ et, par continuité de f en 0, $C = f(0) = 0$. On termine par parité de f : $f(x) = \pi[|x| - \ln(1+|x|)]$

- Exercice 30** [sujet] 1. on pose $f(x) = \int_0^1 \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2} dt$ et on vérifie $f \in \mathcal{C}^1([0, 1])$ car $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} \leq \frac{t}{1+t^2}$ intégrable sur $[0, 1]$. On a donc $f'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} dt = \frac{1}{1+x^2} \int_0^1 \left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{t+x}{1+t^2} \right) dt = -\frac{\ln(1+x)}{1+x^2} + \frac{\ln 2}{2(1+x^2)} + \frac{\pi}{4(1+x^2)}$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit le résultat
2. Avec $x = 1$, on a $I = \frac{\pi \ln 2}{8}$

- Exercice 31** [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ alors $|g(x, t)| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2}$ donne f continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} \leq \frac{t}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne $g \in \mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Si $x \in]0, 1[$, $g'(x) = \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{x^2+t^2} \right) dt = \frac{\ln x}{x^2-1}$ qui est prolongeable par continuité en 0; comme $f(0) = 0$, f est bien la primitive de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ qui s'annule en 0. Comme f est continue en 1, c'est $f(1) \stackrel{\text{IPP}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{8}$.

- Exercice 32** [sujet] 1. $t \mapsto f(x, t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ et positive (pour la DV), $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^x}$ donc $D =]1, +\infty[$
2. Avec $|f(x, t)| \leq \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ f(a, t) & \text{si } t > 1 \end{cases}$ pour $x \in [a, b] \subset D$.
3. F est $\mathcal{C}^1$ sur D avec $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t^x |\ln(t)|}{(1+t^x)^2} \leq \frac{|\ln(t)|}{f}(x, t) \leq |\ln(t)| f(a, t) = \psi(t)$ qui reste intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\phi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\ln(t)|$ et $\psi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1+a}{2}}}\right)$. Puis poser $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale sur $]0, 1[$. F est donc décroissante.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} F = 0$ par TCD (et caract séq) avec la domination utilisée pour la continuité. Enfin, $\lim_1 F = +\infty$ car $F(x) \geq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t^x} \geq \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x} = \frac{1}{2(x-1)}$

- Exercice 33** [sujet] 1. Si $f(x, t) = \frac{e^{-xt} - e^{-yt}}{t}$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = y - x$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = e^{-xt} \leq e^{-at}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donne $F'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{-1}{x}$.
2. $F(x) = -\ln(x) + C$ et $F(y) = 0$ donc $F(x) = \ln(y) - \ln(x)$.

Exercice 34 [sujet] 1. fait en cours

2. $g(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} - \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\sin(t)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ pour $x > 0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ (et $f(0) = 0$)
- $f(x) = I - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ avec $u_n(x) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-xt}}{t} \sin(t) dt = (-1)^n \int_0^\pi \frac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u} \sin(u) du$ et par CSSA (à vérifier)
- $|R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{\pi}{n\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc CVU sur $\mathbb{R}^+$. Reste à vérifier u_n continue : avec $\left|\frac{e^{-(n\pi+u)}}{n\pi+u} \sin(u)\right| \leq \frac{1}{n\pi}$ qui est intégrable sur $[n\pi, (n+1)\pi]$
3. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-at}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt = \text{Im}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f(x) = \arctan(x) + C$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}^+$ par continuité et $f(0) = 0 = C$. Enfin, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = I$ par double limite (avec la série de fct) avec CVU et $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$ par TCDPC (par ex). On retrouve $I = \frac{\pi}{2}$

- Exercice 35** [sujet] 1. Si $f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt)$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = b - a$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ puis $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| \leq e^{-at} + e^{-bt}$ donne $F \in \mathcal{C}^1$.
2. $F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt = \frac{x}{a^2 + x^2} - \frac{x}{b^2 + x^2}$ donc $F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2}\right) + C$
3. Par IPP (si $x > 0$) ; $h'(t) = \frac{be^{-bt} - ae^{-at}}{t} - \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t^2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} h'(t) = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ et $h'(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc h' est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$; on en déduit $|F(x)| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |h'(t)| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $C = 0$.

Exercice 36 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{e^{-\arctan(xt)}}{2 + t^2}$ alors $|g(x, t)| \leq 1$ (ce qui donne en fait la continuité de f)

2. $0 \leq g(x, t) \leq \frac{1}{1 + t^2}$ donne $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$ et $f(0) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1 + (t/\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$
3. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{t}{1 + (xt)^2} g(x, t) \leq t$ donne $f \in \mathcal{C}^1$ et $f'(x) = -\int_0^1 \frac{t}{1 + (xt)^2} g(x, t) dt \leq 0$.
4. On applique le théorème de bijection à $h(x) = f(x) - x$: h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, $h(0) = f(0) > 0$ et $\lim_{+\infty} h = -\infty$ (car f est majorée)

Exercice 37 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq 1$ puis $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{\pi t}{(x+t)^2} \left|\sin\left(\frac{\pi t}{x+t}\right)\right| \leq \frac{\pi t}{(a+t)^2}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

2. $f(0) = -1$ et $\lim_{+\infty} f = 1$ par TCDPC (même domination que pour $\mathcal{C}^0$)
3. Tous calculs faits, on trouve $f'(x) = \int_{\frac{x\pi}{x+1}}^\pi \frac{\pi-v}{v} \sin(v) dv$ et $\frac{\pi-v}{v} \sin(v) \xrightarrow{v \rightarrow 0} \pi$ donc $v \mapsto \frac{\pi-v}{v} \sin(v)$ est intégrable sur $]0, \pi]$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \int_0^\pi \frac{\pi-v}{v} \sin(v) dv$ donc (cons. du TAF), f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 38 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{t^3 e^{-xt}}{\sqrt{1+t^4}}$ alors $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t e^{-xt}$ donc est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $x > 0$ (et $g \geq 0$) ; f décroît car $x \mapsto g(x, t)$ décroît pour tout t .

2. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = t g(x, t) \leq t g(a, t)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $t g(a, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donne $f \in \mathcal{C}^1$; on pose $u = xt$:
- $f(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4 + x^4}} du$ et $x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4 + x^4}} du$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ par $\left|\frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{u^4 + x^4}}\right| \leq u e^{-u}$ ce qui donne $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 f(x) = \int_0^{+\infty} u e^{-u} du = 1$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

3. Par équivalent, f n'est pas intégrable sur $]0, 1]$ mais l'est sur $[1, +\infty[$ car $|f(x)| = \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} \frac{u^3 e^{-u}}{\sqrt{1+(u/x)^4}} du \leq \frac{1}{x^4} \int_0^{+\infty} u^3 e^{-u} du = O\left(\frac{1}{x^4}\right)$.

Exercice 39 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq \frac{1 - \cos t}{t^2}$ puis $\lim_0 \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ et $\frac{1 - \cos t}{t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. Fait au dessus (domination)

3. $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{1 - \cos(t)}{t} e^{-xt}$ donc $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$ (mêmes justifications); puis $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = |1 - \cos(t)| e^{-xt} \leq 2e^{-at}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On en déduit $f''(x) = \int_0^{+\infty} (1 - \cos(t)) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ pour $x > 0$

4. On vérifie $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^2} \leq \frac{1}{2}$ donc $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{2x}$ si $x > 0$. De même, $0 \leq f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t} e^{xt} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-xt} dt = \frac{1}{2x^2}$ donc $\lim_{+\infty} f = \lim_{+\infty} f' = 0$ (ou TCDPC)

5. si $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ et $\lim_{+\infty} f' = 0$ donc $C = 0$

6. $f(0) \stackrel{\text{IPP}}{=} I$ (donc I existe). On a, pour $x > 0$, $f(x) = x \ln(x) - \frac{x}{2} \ln(1+x^2) - \arctan(x) + D$ puis $D = \frac{\pi}{2}$ car $\lim_{+\infty} f = 0$. Par continuité de f en 0, on a $I = f(0) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 40 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{e^{-tx^2}}{\sqrt{t+t^3}}$ alors $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$; puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x\sqrt{t}e^{-tx^2}}{\sqrt{1+t^2}} \leq \frac{2b\sqrt{t}e^{-ta^2}}{\sqrt{1+t^2}}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. On pose $u = tx^2 : f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+u^3/x^4}} du$ puis, si (x_n) tend vers $+\infty$, $x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = C > 0$ par TCD avec $\left| \frac{e^{-u}}{\sqrt{u+u^3/(x_n)^4}} \right| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$. On en déduit $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{C}{x}$.

Exercice 41 [sujet] 1. On pose $h(x, t) = \frac{e^{itx}}{(1+t^2)^2}$ et on a $|h(x, t)| = \frac{1}{(1+t^2)^2}$ et $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{(1+t^2)^2}$ puis $\left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$ qui sont toutes intégrables donc f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

2. Par IPP $f'(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \times e^{itx} dt = -\frac{ix}{2} g(x)$

Exercice 42 [sujet] Si $g(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t}$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$; puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{|\sin(xt)|}{t} e^{-t} \leq e^{-t}$ et enfin $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq e^{-t}$ donc $f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t} dt = \frac{1}{1+x^2}$. On remonte : $f'(x) = \arctan(x) + C$, avec $C = 0$ car $f'(0) = 0$, puis $f(x) = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + D$ avec $D = 0$ car $f(0) = 0$

Exercice 43 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{1 - e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ (donc g est continue sur $\mathbb{R}^+$), puis $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{t}{1+t^2} e^{-xt} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq \frac{t^2}{1+t^2} e^{-at} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. Soit (x_n) tendant vers $+\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n f(x_n) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ par TCD avec $|g(x_n, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$.
 $g''(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt - g(x) + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ donc $g''(x) + \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\pi}{2}$
 par continuité de g en 0. Ensuite $g'(x) = g'(1) + \int_1^x \left(g''(t) + \frac{1}{t} \right) dt - \ln(x)$ donc $g'(x) + \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} g'(1) - \int_0^1 \left(g''(t) + \frac{1}{t} \right) dt$ (finie), $g'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln(x)$ est donc intégrable sur $]0, 1]$ et enfin $g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t) dt =$

$\int_0^x (g'(t) + \ln(t)) dt - \int_0^x \ln(t) dt; t \mapsto g'(t) + \ln(t)$ converge en 0 donc est bornée au voisinage de 0, ce qui donne $\int_0^x (g'(t) + \ln(t)) dt \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x)$ alors que $\int_0^x \ln(t) dt = x \ln(x) - x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$. On a donc $g(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(x)$ et $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(x)$.

Exercice 44 [sujet] Si $g(x, t) = \frac{\arctan(tx)}{1+t^2}$, $|g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2(1+t^2)}$ donne la continuité sur $\mathbb{R}$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} \leq \frac{t}{(1+t^2)(1+a^2t^2)}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Puis, pour $x \neq 1$, $f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2t}{1+t^2x^2} \right) dt = \frac{\ln(x)}{x^2-1}$ (qui se prolonge par continuité en 1 pour donne $f'(1) = \frac{1}{2}$). $f(0) = 0$ donc f' étant intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a $f(x) = \int_0^x f'(t) dt$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \int_0^{+\infty} f'(t) dt$ (limite finie).

Exercice 45 [sujet] 1. $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\ln(t)}{t^{-x}} = o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\right)$ et $\lim_{t \rightarrow 1} g(x, t) = 1$
 2. Si $x \in [a, b] \subset D$, $\left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln(t)|^{k+1}t^a}{1-t} = \varphi(t); \varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$ si $k \geq 1$.
 3. $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k+1)^2}$ par TITT avec $\frac{t^x \ln(t)}{t-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} -\ln(t)t^{x+k}$ pour $t \in]0, 1[$ et $\int_0^1 |\ln(t)|t^{x+k} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{1}{(x+k+1)^2}$.

Exercice 46 [sujet] $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+xu^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$ puis $I'(x) = -J(x)$ car $\left| \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + x \sin^2 t)^2} \right| \leq \frac{\sin^2 t}{(\cos^2 t + a \sin^2 t)^2}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$ donc $J(x) = \frac{\pi}{4x\sqrt{x}}$

Exercice 47 [sujet] 1. $F'(x) = \int_0^\pi \sin(t) \cos(a \sin t) dt$ car $|\sin(t) \cos(a \cos t)| \leq 1$ et 1 est intégrable sur $[0, \pi]$
 2. $F(0) = 0$ et F dérivable en 0 donc $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} F(a) = F'(0) = \int_0^\pi \sin(t) dt = 2$.

Exercice 48 [sujet]

$$|g(x, t)| \leq e^{-t}$$

$$\text{Avec } \left| \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(x, t) \right| = t^{2k} \left| \cos\left(xt^2 + k\frac{\pi}{2}\right) \right| e^{-t} \leq t^{2k} e^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{4k} e^{-t} dt = (-1)^k (4k)!$. La série de Taylor de F est donc $\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{(4k)!}{(2k)!} x^{2k}$ dont le RCV est nul donc F n'est pas DSE.

Exercice 49 [sujet] On montre que G est dérivable en 0 : si $g(x, t) = \exp[x \ln(f(t))]$, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \ln(f(t))g(x, t) \leq C$ si $x \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$ car $(x, t) \mapsto \ln(f(t))g(x, t)$ est continue sur $[-a, a] \times [0, 1]$ qui est fermé borné (et non vide); G est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\frac{1}{x} (\ln(G(x)) - \ln(G(0))) \xrightarrow{x \rightarrow 0} (\ln \circ G)'(0) = \frac{G'(0)}{G(0)} = \int_0^1 \ln(f(t)) dt$. Comme $G(0) = 1$, on a $F(x) = \exp\left[\frac{1}{x} \ln(G(x))\right] \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp \int_0^1 \ln(f(t)) dt$.

Exercice 50 [sujet] 1. Cours

2. On a $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t \operatorname{sh}(at) e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a, a]$
 3. Par IPP, on trouve $f'(x) = \frac{x}{2} f(x)$ donc $f(x) = f(0) e^{\frac{x^2}{4}}$

Exercice 51 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq t e^{-t^2} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $f'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(xt) \times t e^{-t^2} dt \stackrel{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2} f(x)$
 3. $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}$

Exercice 52 [sujet] 1. $|\cos(2xt)e^{-x^2}| \leq e^{-x^2}$ (intégrable sur $\mathbb{R}^+$)

2. Si $t \in [-a, a] \subset \mathbb{R}$, $|-2x \sin(2xt)e^{-x^2}| \leq 2ae^{-x^2}$ donc $f'(t) = -2 \int_0^{+\infty} \sin(2xt) \times xe^{-x^2} dx \stackrel{\text{IPP}}{=} -2tf(t)$

3. $f(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-t^2}$

4. $f^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} 2^n t^n \cos\left(2xt + n\frac{\pi}{2}\right) e^{-x^2} dx$ car $\left|2^n t^n \cos\left(2xt + n\frac{\pi}{2}\right) e^{-x^2}\right| \leq 2^n a^n e^{-x^2}$ si $t \in [-a, a]$

Exercice 53 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t}$ alors, pour $x > 0$ $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{t}{1+t^2} e^{-xt} \leq \frac{t}{1+t^2} e^{-at} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$. On vérifie ensuite $f(x) - f'(x) = \frac{1}{x}$

2. On pose $u = xt$ et on a $xf(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+u/x} du$ qui tend vers $\int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$ par TCD : si (x_n) tend vers $+\infty$, $\left|\frac{e^{-u}}{1+u/x_n}\right| \leq e^{-u}$.

Exercice 54 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)$ alors $|g(x, t)| \leq e^{-t^2}$ donne la continuité

2. f est paire donc si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| \leq \frac{2b}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \varphi(t)$, $\lim_0 \varphi = 0$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

3. si $x > 0$, $f'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) dt \stackrel{t=\frac{x}{u}}{=} -2f(x)$ donc $f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|x|}$ par parité.

Exercice 55 [sujet] 1. $t \mapsto f(x, t)$ est C^0 sur $\mathbb{R}^{+*}$, si $x > 0$, $\lim_{t \rightarrow 0} f(x, t) = 0$ et $f(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ si $x > 0$. I est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ car si $x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $|f(x, t)| \leq f(\alpha, t)$.

$I(0)$ existe et I est même continue sur $\mathbb{R}^+$ car $|f(x, t)| \leq f(0, t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $f(0, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et

$f(0, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

2. Si $x \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^{+*}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{e^{-x/t} e^{-bt}}{t\sqrt{t}} \leq \frac{e^{-\alpha/t} e^{-bt}}{t\sqrt{t}} = \varphi(t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ car $\lim_{t \rightarrow 0} \varphi(t) = 0$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$

3. Poser $t = u^2$

4. Poser $v = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{x}{b}}$

5. $I(x) = \lambda e^{-2\sqrt{bx}}$ pour $x > 0$ et $\lambda = I(0)$ par continuité de I en 0.

Exercice 56 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{e^{-xt}}{x+t}$ alors $t \mapsto g(x, t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $x > 0$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$; si (x_n) tend vers $+\infty$, $|g(x_n, t)| \leq e^{-t}$ dès que $x_n \geq 1$ donc par TCD, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

2. $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x, t)\right| = \frac{t}{t+x} e^{-xt} + \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} \leq \frac{t}{a+t} e^{-at} + \frac{e^{-at}}{(a+t)^2}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$; l'équation différentielle s'obtient en effectuant une IPP sur le terme $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(x+t)^2} dt$ de $F'(x)$.

Comme $F'(x) = 2xF(x) - \frac{2}{x}$, F est C^n pour tout n par récurrence.

3. Les solutions de cette équation sont $y(x) = \alpha e^{x^2} + 2e^{x^2} \int_1^x \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ (variation de la constante); la seule solution de cette forme tendant vers 0 est obtenue pour $\alpha = -2 \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ (toutes les autres DV en $+\infty$ et on sait déjà que cette équation admet au moins une solution qui tend vers 0 en $+\infty$ puisque F est une telle solution).

$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0 \rightarrow +} \infty$ (intégrale DV d'une fonction positive) donc $F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_x^1 \frac{e^{-t^2}}{t} dt$ (l'autre partie est une constante donc négligeable devant ce terme qui tend vers $+\infty$). Enfin, $\int_0^x \frac{e^{-t^2} - 1}{t} dt$ est CV donc

$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 2 \int_x^1 \frac{dt}{t} = -2 \ln(x)$.

Exercice 57 [sujet] 1. $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ donne tout avec $|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} = F(0)$

2. idem avec $|g(x, t)| \leq \frac{1}{(1+t^2)^2}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$

3. poser $u = xt$

4. si $H(x) = \frac{F(x)}{x} = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2+t^2} dt$ alors $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{2x|\cos t|}{(x^2+t^2)^2} \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)^2}$, si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Donc $H'(x) = -2x \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{(x^2+t^2)^2} dt = -2 \frac{G(x)}{x^2}$ en posant $u = xt$

5. $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{(1+t^2)^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}^+$ donc $G'(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2} \times \sin(xt) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} -\frac{x}{2} F(x)$

6. F' est donc $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $xF'(x) = F(x) - 2G(x)$ donne $xF''(x) = xF'(x)$. On en déduit $F(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ sur $\mathbb{R}^+$ (car continue en 0), F bornée donne $\alpha = 0$ et $F(0) = \frac{\pi}{2}$ donc $F(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x}$

Exercice 58 [sujet] 1. Si $f(x, t) = \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ alors $|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$, puis $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} \leq e^{-at}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. On vérifie $g(x) + g''(x) = \frac{1}{x}$. On pose $h(x) = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ (les deux intégrales CV si $x > 0$ par IPP) et on vérifie que h est aussi solution de cette équation car $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \int_1^x \frac{\sin(t)}{t} dt$ est $\mathcal{C}^1$ de dérivée $-\frac{\sin(x)}{x}$.
 $f - h$ est donc solution de l'équation homogène $y'' + y = 0$ dont les solutions $\alpha \cos + \beta \sin$ sont 2π -périodiques. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$; puis $0 \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ donc $g - h$ tend vers 0 en $+\infty$ et est 2π -périodique, donc est nulle.

Exercice 59 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$, puis $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$ et $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{t^2}{1+t^2} e^{-xt} \leq e^{-at}$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$.

2. facile avec f''

3. Les solutions de $(\mathcal{E})$ sont $y(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) + f(x)$. On vérifie que $\lim_{+\infty} f = 0$ car $0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x}$ (ou TCDPC) donc si y tend vers 0 alors $y(x) - f(x)$ aussi mais $y - f$ est périodique donc si elle tend vers 0, on a $(y - f)(x) = (y - f)(x + 2n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $y = f$.

Exercice 60 [sujet] On pose $g(x, t) = \cos(x \cos t)$; $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t)$ sont continues sur $[0, \pi]$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq 1$ donne $f \in \mathcal{C}^2$; on trouve $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$ par IPP sur $f'(x) = - \int_0^\pi \cos(t) \sin(x \cos(t)) dt$

Exercice 61 [sujet] 1. On pose $g(x, t) = \ln(t)e^{-xt}$ et on a $g(x, t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \ln(t)$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x > 0$; puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq |t \ln(t)| e^{-at} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$

2. Par IPP sur $f'(x)$, on trouve $f(x) + xf'(x) = -\frac{1}{x}$; il suffit ensuite de vérifier que $x \mapsto \frac{1}{x}$ est solution de l'équation homogène et $x \mapsto \frac{-\ln(x)}{x}$ est une solution de l'équation complète.

Exercice 62 [sujet] 1. Si $g(x, t) = \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)}$ alors $\lim_{t \rightarrow 0} g(x, t) = \frac{x^2}{2}$ et $g(x, t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ donc $D = \mathbb{R}$

2. On prouve directement $\mathcal{C}^2$: $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{\sin(xt)}{t(1+t^2)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (prolongeable en 0 et $O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ quand t tend vers $+\infty$) puis $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{|\cos(xt)|}{1+t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}$

3. $f(x) - f''(x) = \int_0^{+\infty} \left[(1 - \cos(xt)) \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) - \frac{\cos(xt)}{1+t^2} \right] dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos(xt)}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt$ puis $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ et, en posant $u = xt$ ($x > 0$), on a $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} dt = x \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du$.

On a $f''(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ et $|f''(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$ (borné sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\alpha = 0$; $f'(0) = 0$ donne (par continuité de f' en 0) $\beta = -a$ et $f(0) = 0$ (par continuité de f en 0 cette fois), $\beta = -b = \frac{\pi}{2}$. On en déduit $f(x) = \frac{\pi}{2}(x + e^{-x} - 1)$ pour $x > 0$ (et f est paire)

On peut aussi en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} du = \frac{\pi}{2} \stackrel{\text{IPP}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$.

Exercice 63 [sujet] 1. Si $f(t, x) = \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2}$ alors $|f(t, x)| \leq \frac{1}{1+x^2}$ donne F continue sur $\mathbb{R}^+$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq e^{-ax^2}$ si $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}^{+*}$, la classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. $F'(t) = - \int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2} e^{-tx^2} dx = F(t) - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}$ (en posant $u = x\sqrt{t}$). Les solutions de cette équation sont $y(t) = \alpha e^t - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^t \int_0^t \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ (l'intégrale CV car $\underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{u}}$); $f(0) = \pi/2$ donc $F(t) = \frac{\pi}{2} e^t - \sqrt{\pi} e^t \theta(t)$ (en posant $u = v^2$)

Exercice 64 [sujet] 1. $g(x, t) = \frac{e^{-t} e^{itx}}{\sqrt{t}}$ puis $|g(x, t)| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $|g(x, t)| \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o(e^{-t})$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$. $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \sqrt{t} e^{-t} \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donne la classe $\mathcal{C}^1$.

2. $f(x) = \int_0^\varepsilon g(x, t) dt + \int_\varepsilon^{+\infty} g(x, t) dt$; $\left| \int_0^\varepsilon g(x, t) dt \right| \leq \int_0^\varepsilon \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{\varepsilon}$ et $\int_\varepsilon^{+\infty} g(x, t) dt \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{e^{-\varepsilon+ix\varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon}(-1+ix)} + \frac{1}{2(-1+ix)} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t} e^{ixt}}{t\sqrt{t}} dt$ donc $\left| \int_\varepsilon^{+\infty} g(x, t) dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(1+x^2)} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}} dt$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe x_0 tel que pour $x \geq x_0$ on ait $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}(1+x^2)} \leq \varepsilon$ et $\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t\sqrt{t}} dt \leq \varepsilon$. On a donc pour $\varepsilon > 0$ et $x \geq x_0$, $|f(x)| \leq 2\sqrt{\varepsilon} + 2\varepsilon$.

3. $f'(x) \stackrel{\text{IPP}}{=} \frac{-i}{2(-1+ix)} f(x)$ donc $f(x) = f(0)(1+x^2)^{-1/4} e^{\frac{i}{2} \arctan x}$ (ce qui redonne bien plus facilement la limite nulle en $+\infty$!)

Exercice 65 [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq e^{-kt}$ et $k > 0$

2. $F'_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(k-1)t} \cos(xe^t) dt$ car $|e^{-(k-1)t} \cos(xe^t)| \leq e^{-(k-1)t}$ et $k-1 > 0$. Par IPP, $xF'_k(x) = \int_0^{+\infty} e^{-kt} \times xe^t \cos(xe^t) dt = \left[e^{-kt} \sin(xe^t) \right]_{t=0}^{t=+\infty} + \int_0^{+\infty} ke^{-kt} \sin(xe^t) dt$.

Exercice 66 [sujet] 1. f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car, si $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^a$; $f'(x) = - \int_0^{\pi/4} \tan(t) e^{-x \tan(t)} dt \leq 0$.

$e^u \geq 1+u$ donc $f(x) \geq \frac{\pi}{4} - x \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$ et $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ par TCD car $|e^{-x_n \tan(t)}| \leq 1$

2. On a $u_1 = f(u_0) \in \mathbb{R}^+$ et comme sur $\mathbb{R}^+$, on a $|f'(x)| \leq \int_0^{\pi/4} \tan(t) dt = k < 1$, f est k -lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$ donc $|u_{n+1} - u_n| \leq k|u_n - u_{n-1}| \leq k^{n-1}|u_2 - u_1|$; comme $k \in [0, 1[$, $\sum k^n$ CV donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est ACV et (u_n) CV.

3. $\lim_{-\infty} f = +\infty$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^-$.

En posant $u = x \tan(t)$, on trouve $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} du$ puis $0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} du \leq \int_x^{+\infty} e^{-u} du = e^{-x}$ donc $xf(x) \stackrel{+}{=} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+(u/x)^2} du + o(1)$ et, par TCD, $\lim_{+\infty} xf(x) = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$ car $\left| \frac{e^{-u}}{1+(u/x_n)^2} \right| \leq e^{-u}$.

On a donc $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ donc f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

- Exercice 67** [sujet] 1. $|g(x, t)| \leq e^{-t}$ donc $t \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| = \frac{t}{1 + (xt)^2} e^{-t} \leq te^{-t} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, t) \right| = \frac{2|x|t^3}{(1 + (xt)^2)^2} e^{-t} \leq 2at^3 e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ si $x \in [-a, a]$
2. $\mathbb{R}^+$ (et $\mathbb{R}^-$) est stable par f donc si $u_0 \geq 0$ alors $u_n \geq 0$, puis $\arctan(xt) \leq xt$ si $xt \geq 0$ (car $\arctan$ est concave sur $\mathbb{R}^+$) donc $f(x) \leq \int_0^{+\infty} xte^{-t} dt = x\Gamma(2) = x$ donc (u_n) décroît, est minorée par 0 donc CV vers $\ell \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue); enfin, $f(x) - x = \int_0^{+\infty} (\arctan(xt) - xt)e^{-t} dt < 0$ si $x \neq 0$ donc $\ell = 0$