(Extrait de Centrale PC 2023 maths 2)

Notations

$\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.

$(H_j)_{j\in\mathbb{N}}$ désigne la famille de polynômes définie par $H_0 = 1$ et, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, $H_j = \dfrac{1}{j!}\displaystyle\prod_{i=0}^{j-1}(X-i)$.

Pour $(k,n)\in\mathbb{N}^2$, on note $\dbinom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On note $\dbinom{0}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

I Utilisation de séries entières

I.A- Une première formule

1. Pour $k\in\mathbb{N}$, montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\binom{n}{k}x^n$ est absolument convergente pour $|x|<1$.

2. Montrer, par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$, que, pour tout $x\in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$

On pourra utiliser un produit de Cauchy.

I.B- Utilisation d'une famille de polynômes

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$.

1. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, f_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

2. Soit $k\in\mathbb{N}$. Montrer que $(H_0,\dots,H_k)$ est une base de $\mathbb{R}_k[X]$ et qu'il existe une unique famille $(\alpha_{k,0},\dots,\alpha_{k,k})$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$ telle que $X^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}H_j$.

3. Pour $k\in\mathbb{N}$, donner les valeurs de $\alpha_{k,0}$ et $\alpha_{k,k}$.

4. Pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$ tel que $1\leqslant j\leqslant k$, montrer que $\alpha_{k,j} = j^k - \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j}{i}\alpha_{k,i}$.

5. Écrire une fonction Python `alpha` qui prend un couple d'entiers (k,j) en paramètre et qui renvoie la valeur $\alpha_{k,j}$. On supposera avoir accès à une fonction `binome` telle que `binome(n,k)` renvoie le coefficient binomial $\dbinom{n}{k}$.

6. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, il existe un unique polynôme réel P_k tel que, pour tout $x\in]-1,1[$, $f_k(x) = \dfrac{P_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ et que ce polynôme vérifie la relation $P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\alpha_{k,j}X^j(1-X)^{k-j}$.

7. À l'aide de la fonction Python `alpha`, écrire une fonction Python `P` qui prend l'entier k en paramètre et qui renvoie la liste des coefficients de degré 0 à k de P_k.

8. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k$.

9. Calculer explicitement P_2 et P_3.

10. Déterminer, pour tout $k\in\mathbb{N}$, le degré de P_k ainsi que son coefficient dominant.

11. Montrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in]0,1[$, $x^{k+1}P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k(x)$.

12. En déduire, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $j\in[\![0,k]\!]$, un lien entre les coefficients de degré j et $k+1-j$ de P_k.

II Étude de sommes doubles

On considère dans cette partie des familles de nombres réels indexées par $\mathbb{N}^2$ c'est-à-dire du type $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$.

Dans ce contexte, on se demande s'il est possible de définir les quantités $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}$ et si ces quantités, lorsqu'elles sont définies, sont nécessairement égales.

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

- Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.
- (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

II.A- Application

II.A.1) Une première application

Soit $x \in]-1,1[$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$.

2. Montrer que la série $\sum_{p\geqslant 1} \frac{x^p}{(1-x^p)^2}$ converge et que sa somme est égale à celle de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{nx^n}{1-x^n}$.

II.A.2)- Une deuxième application

On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Montrer que l'on peut définir, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3(k+1)}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

II.B- Contre-exemples

II.B.1) Un premier contre-exemple

On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ -1 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2^{j-i}} & \text{si } i < j. \end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

2. Montrer l'existence de $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et calculer sa valeur.

3. A-t-on $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$?

II.B.2)- Un deuxième contre-exemple

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ définie, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^2$, par $c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i\,3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$

1. Montrer l'existence de $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ et calculer sa valeur.

2. Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 0} c_{i,j}$ converge et que $\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = \frac{1}{2}\,\frac{3^j-1}{3^{j-1}}$.

3. Quelle est la nature de la série $\sum_{j\geqslant 0}\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$?