Correction DM11

(Extrait de Centrale PC 2023 maths 2)

Partie I.A

1. si $0 < |x| < 1$ alors $\left|\dfrac{\binom{n+1}{k}x^{n+1}}{\binom{n}{k}x^n}\right| = \dfrac{n+1}{n+1-k}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x| < 1$ donc, d'après la règle de d'Alembert, (SATP) la série $\boxed{\sum \binom{n}{k}x^n \text{ est ACV}}$ (elle est ACV aussi pour $x = 0$ bien sûr).

2. Pour $k = 0$ et $|x| < 1$, on a $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $\dbinom{n}{0} = 1$ donc le résultat est vrai.

Si on suppose, pour $|x| < 1$, $\dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k}x^n$ alors $\dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \times \dfrac{x}{1-x}$. On pose alors $a_n = \dbinom{n}{k}x^n$ et $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ x^n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ de sorte que $\dfrac{x}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. On a donc $\dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} = \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right)$.

Les deux séries étant ACV pour $|x| < 1$, par produit de Cauchy, on a $\dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ avec $c_n = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}$.

On a donc $c_0 = 0 = \dbinom{0}{k+1}$ et, pour $n \geqslant 1$, $c_n = \displaystyle\sum_{h=0}^{n-1}\binom{h}{k}x^n = x^n \sum_{h=0}^{n-1}\left[\binom{h+1}{k+1} - \binom{h}{k+1}\right] = x^n\binom{n}{k+1}$, par télescopage, car $\dbinom{0}{k+1} = 0$. On a donc bien $\dfrac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n}{k+1}x^n$ si $|x| < 1$.

Partie I.B

1. On pose $u_n(x) = n^k x^n$ et on applique le théorème de dérivation :

H1 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$.

H2 : si $|x| < 1$ alors $n^k x^n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum n^k x^n$ est ACV et $\sum u_n$ CVS sur $]-1,1[$.

H3 : si $x \in [-a,a] \subset]-1,1[$ alors $|u_n'(x)| = n^{k+1}|x|^{n-1} \leqslant n^{k+1}a^{n-1}$ (indépendant de x) et $n^{k+1}a^{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ car $|a| < 1$. La série $\sum u_n'$ CVNTS de $]-1,1[$.

On en déduit $\boxed{f_k \in \mathcal{C}^1(]-1,1[) \text{ et, pour } |x| < 1,\ f_k'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1}x^{n-1}}$

2. $(H_0,\dots,H_k)$ est une famille de $k+1$ polynômes de $\mathbb{R}_k[X]$, de degrés échelonnés, donc est une base de $\mathbb{R}_k[X]$; ce qui donne l'existence et l'unicité des $\alpha_{k,i}$ (les coordonnées de de X^k dans la base $(H_0,\dots,H_k)$).

3. On a $H_i(0) = 0$ pour $i \geqslant 1$ et $H_0(0) = 1$ donc $\boxed{\alpha_{k,0} = 0^k = 0}$ Comme H_k est le seul polynôme de degré k, en identifiant le coefficient dominant de X^k, on trouve $\boxed{\alpha_{k,k} = k!}$

4. On a $H_i(j) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \leqslant i-1 \\ \dbinom{j}{i} & \text{si } j \geqslant i \end{cases}$ donc en évaluant X^k en $X = j$, on trouve $j^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\alpha_{k,i}H_i(j) = \sum_{i=0}^{j}\alpha_{k,i}H_i(j) = \alpha_{k,j}H_j(j) + \sum_{i=0}^{j-1}\alpha_{k,i}H_i(j) = \alpha_{k,j} + \sum_{i=0}^{j-1}\alpha_{k,i}\binom{j}{i}$

5. Rien n'interdit une fonction récursive assez inefficace :

```python
def alpha(k,j) :
    if k == 0 :
        return 1
    elif j == 0 :
        return 0
    else :
        r = j**k
        for i in range(j) :
            r = r - binome(j,i)*alpha(k,i)
        return r
```

6. On a $n^k = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n)$ donc $f_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} H_j(n) x^n \overset{\sum \text{finie}}{=} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n$ puis $H_j(n) = \binom{n}{j}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} H_j(n) x^n = \dfrac{x^j}{(1-x)^{j+1}}$ d'après **I.A.2**. On a donc $f_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} \dfrac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \dfrac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j} x^j (1-x)^{k-j}$, ce qui donne l'existence des polynômes P_k et la relation souhaitée.

Reste l'unicité : si Q_k est un autre polynôme tel que $f_k(x) = \dfrac{Q_k(x)}{(1-x)^{k+1}}$ sur $]-1,1[$ alors $P_k = Q_k$ sur $]-1,1[$ donc $P_k = Q_k$ car $P_k - Q_k$ s'annule sur $]-1,1[$ donc possède une infinité de racines.

7. On peut commencer par calculer les coefficients de $X^j(1-X)^{k-j}$ avant de faire une combinaison linéaire

```
def P(k) :
    L = [0]*(k+1)
    for h in range(k+1) :
        M = [(-1)**i*binome(k-j, i) for i in range(k-j+1)]    # (1 - X)^(k-j)
        M = [0]*j + M                                          # X^j (1 - X)^(k-j)
        for i in range(k+1) :
            L[i] += alpha(k,j)*M[i]
    return L
```

8. On a $f_k'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^{k+1} x^{n-1}$ donc $x f_k'(x) = f_{k+1}(x)$ donc $x\left(\dfrac{P_k'(x)}{(1-x)^{k+1}} + \dfrac{(k+1)P_k(x)}{(1-x)^{k+2}}\right) = \dfrac{P_{k+1}(x)}{(1-x)^{k+2}}$ ce qui donne, par unicité de P_{k+1}, $\boxed{P_{k+1} = X(1-X)P_k' + (k+1)XP_k}$

9. $P_0 = 1$ puis $P_1 = X$ donc $\boxed{P_2 = X^2 + X \text{ et } P_3 = X^3 + 4X^2 + X}$

10. On montre par récurrence sur k que $P_k = X^k + Q_k$ avec $\deg(Q_k) \leqslant k-1$: évident pour $k = 0$ (ou 1). Si on suppose le résultat vrai pour P_k alors $P_{k+1} = X(1-X)(kX^{k-1} + Q_k') + (k+1)(X^{k+1} + XQ_k) = X^{k+1} + X(1-X)Q_k' + (k+1)XQ_k$ et $\deg(X(1-X)Q_k' + (k+1)XQ_k) \leqslant k$. On en déduit que $\boxed{P_k \text{ est unitaire de degré } k}$

11. On procède à nouveau par récurrence sur k : le résultat est évident pour $k = 0$; s'il est vrai pour P_k alors on a $(k+1)x^k P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) - x^{k-1} P_k'\left(\dfrac{1}{x}\right) = P_k'(x)$ donc $x^{k+2} P_{k+1}\left(\dfrac{1}{x}\right) = (x-1)x^k P_k'\left(\dfrac{1}{x}\right) + (k+1)x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = (x-1)\left[(k+1)x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) - xP_k'(x)\right] + (k+1)P_k(x) = (x-1)\left[(k+1)P_k(x) - xP_k'(x)\right] + (k+1)P_k(x) = x(1-x)P_k'(x) + (k+1)xP_k(x) = P_{k+1}(x)$

12. Si $P_k = \sum_{i=1}^{k} a_i X^i$ (car $P_k(0) = 0$ si $k \geqslant 1$) alors $x^{k+1} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i x^{k+1-i} \overset{j=k+1-i}{=} \sum_{j=1}^{k} a_{k+1-j} X^j$ donc $\boxed{a_j = a_{k+1-j}}$

Partie II.A.1

1. Comme $|x| < 1$, on a $\dfrac{nx^n}{1-x^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum \dfrac{nx^n}{1-x^n}$ est ACV. Toujours avec $|x| < 1$, donc $|x^n| < 1$, on a $\dfrac{nx^n}{1-x^n} = nx^n \sum_{k=0}^{+\infty} (x^n)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} nx^{n(k+1)}$

2. On utilise le deuxième résultat donné avec $a_{n,k} = ix^{n(k+1)}$ (la sommabilité a déjà été prouvée au dessus) : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n(1+k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^{k+1})^n = f_1(x^{k+1}) = \dfrac{x^{k+1}}{(1-x^{k+1})^2}$. Reste à poser $p = k+1$.

Partie II.A.2

1. $\dfrac{1}{k^3(k+1)} \sim \dfrac{1}{k^4}$ (SATP) donc u_n existe

2. On pose $a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{n}{k^3(k+1)} & \text{si } k \geqslant n \\ 0 & \text{si } k < n \end{cases}$ et on applique le théorème de Fubini (le premier résultat rappelé puisque $a_{n,k} \geqslant 0$) : $a_{n,k} = 0$ pour $n > k$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{k} \dfrac{n}{k^3(k+1)} = \dfrac{k(k+1)}{2k^3(k+1)} = \dfrac{1}{2k^2}$ donc $(a_{n,k})_{n,k \geqslant 1}$ est sommable et $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \dfrac{\pi^2}{12}}$

Partie II.B.1

1. $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{j=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{j-i}} = -1 + \frac{1/2}{1-1/2} = 0$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j} = 0}$

2. $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = -1 + \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^{j-i}} \overset{k=j-i}{=} -1 + \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{2^k} = -1 + \frac{1}{2} \times \frac{1-(1/2)^j}{1-1/2} = \frac{1}{2^j}$ et $\boxed{\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j} = \frac{1}{1-1/2} = 2}$

3. Bien sûr que non

Partie II.B.2

1. $\left|\dfrac{1}{3}\right| < 1$ donc $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = i - 2i \sum_{j=i+1}^{+\infty} 3^{i-j} \overset{k=j-i}{=} i - 2i \sum_{k=1}^{+\infty} 3^{-k} = i - 2i\frac{1/3}{1-1/3} = 0$. On a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j} = 0}$

2. $c_{i,j} = 0$ pour $i > j$ donc la somme est finie et $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - 2\sum_{i=0}^{j-1} i3^{i-j}$. On pose alors $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{j-1} x^i = \frac{1-x^j}{1-x}$ pour $x \in]1, +\infty[$ et on remarque que $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j} = j - \frac{2}{3^{j-1}} f'(3) = j - \frac{2}{3^{j-1}} \frac{-j3^{j-1}(1-3) + (1-3^j)}{(1-3)^2} = \boxed{\frac{3^j - 1}{2 \times 3^{j-1}}}$

3. $\dfrac{3^j - 1}{2 \times 3^{j-1}} \xrightarrow[j \to +\infty]{} \dfrac{3}{2}$ donc la série $\displaystyle\sum_{j \geqslant 0} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}\right)$ est grossièrement divergente.