Suites dans un espace vectoriel normé

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Normes

1. Définitions et exemples

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une **norme** sur E est une application N définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les trois axiomes suivants :

i. $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ (axiome de séparation)

ii. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda| \times N(x)$ (positive homogénéité)

iii. $\forall (x,y) \in E^2, N(x+y) \leqslant N(x) + N(y)$ (inégalité triangulaire)

Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel E muni d'une norme.

Remarque(s) :

(I.1) Pour montrer que N définit une norme sur E, commencer par vérifier que E est un espace vectoriel, que N est définie sur E et que N est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

(I.2) $N(0) = N(0x) = 0 \times N(x) = 0$ donc l'axiome de séparation peut s'énoncer avec une équivalence.

(I.3) On a aussi $\forall (x,y) \in E^2, |N(x) - N(y)| \leqslant N(x-y)$.

Exemple(s) :

(I.4) Si E est un espace préhilbertien réel alors $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est une norme sur E (norme euclidienne).

(I.5) $N_1 : A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \mapsto \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |a_{i,j}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(I.6) $N_1 : P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $N : P \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} |P(t)| e^{-t}\, \mathrm{d}t$ sont deux normes sur $\mathbb{K}[X]$.

(I.7) Soit F l'ensemble des fonctions <u>continues</u> et intégrables sur I ; l'application $f \mapsto \|f\|_1 = \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur F.

Définition : Soit (E, N) un espace vectoriel normé. L'application $d : (x,y) \in E^2 \mapsto N(y-x)$ est une **distance** sur E ie une application de E^2 dans $\mathbb{R}^+$ telle que

i. $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii. $\forall (x,y) \in E^2, d(x,y) = d(y,x)$.

iii. $\forall (x,y,z) \in E^3, d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$.

Remarque(s) :

(I.8) Il existe des distances non associées à une norme : c/ex $d(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$

Définition **[I.1] : (Normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$)**
Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$. On définit trois normes sur $\mathbb{K}^p$ en posant

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|$$

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2}$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant p} |x_i|$$

Remarque(s) :

(I.9) Si E est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, pour $x = x_1 e_1 + \dots + x_p e_p$, on peut définir trois normes en posant $N_1(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_1$, $N_2(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_2$ et $N_\infty(x) = \|(x_1, \dots, x_p)\|_\infty$.

Définition **[I.2] :** Soient X un ensemble non vide et $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonction bornées sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit une norme sur $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ en posant, pour $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{K})$,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

Remarque(s) :

(I.10) D'après le programme officiel, on peut utliser directement le résultat suivant : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ alors $\sup(kA) = k \sup(A)$ (éventuellement égaux à $+\infty$ si A n'est pas majorée).

2. Parties bornées

Définition : Soient $(E, \| \,\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie de E. On dit que A est **bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall a \in A, \|a\| \leqslant M$$

Exemple(s) :

(I.11) Toute réunion de 2 parties bornées (ou d'un nombre fini de parties bornées) est bornée.

Définition : Soient $(E, \| \,\|)$ un espace vectoriel normé, X un ensemble non vide quelconque et $f : X \to E$. On dit que f **est bornée sur** X si $f(X)$ est une partie bornée de E, ie

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leqslant M$$

Remarque(s) :

(I.12) L'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées sur X et à valeurs dans E est un espace vectoriel sur lequel $f \longmapsto \sup_{x \in X} \|f(x)\|$ est une norme.

Définition : Soient $(E, \| \,\|)$ un espace vectoriel normé et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **est bornée** si

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}, \|u_n\| \leqslant M$$

Remarque(s) :

(I.13) Cela signifie qu'une suite est bornée si et seulement si la partie $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de E.

(I.14) L'ensemble des suites bornées de E est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.

3. Normes équivalentes

Définition : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si

$$\exists(\alpha,\beta)\in\left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2, \forall x\in E, \alpha N_1(x)\leqslant N_2(x)\leqslant \beta N_1(x)$$

Remarque(s) :

(I.15) Dans cette définition il est indispensable de préciser que $\alpha>0$ (qui impliquera obligatoirement $\beta>0$).

(I.16) On peut bien sûr intervertir N_1 et N_2 dans la définition précédente : on a, pour tout $x\in E$, $\frac{1}{\beta}N_2(x)\leqslant N_1(x)\leqslant \frac{1}{\alpha}N_2(x)$.

(I.17) La relation d'équivalence des normes est transitive : si N_1 et N_2 sont équivalentes et si N_2 et N_3 sont équivalentes alors N_1 et N_3 sont équivalentes.

Exemple(s) :

(I.18) Vérifier que les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.

(I.19) Soit $E=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}), f(0)=0\right\}$. Montrer que $N_1 : f\mapsto \|f+f'\|_\infty$ et $\mathbb{N}_2 : f\mapsto\|f'\|_\infty$ sont deux normes équivalentes sur E. On pourra vérifier $f(x)=e^{-x}\displaystyle\int_0^x e^t(f(t)+f'(t))\,\mathrm{d}t$ si $f\in E$ et $x\in[0,1]$.

(I.20) Montrer que $f\mapsto\|f\|_1=\displaystyle\int_0^1|f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Méthode : si N_1 et N_2 sont deux normes sur un espace vectoriel E.

- ◇ Pour montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes, on montre qu'il existe des constantes a et b telles que , pour tout $x\in E$, on ait

$$N_1(x)\leqslant aN_2(x)\quad \textbf{ET}\quad N_2(x)\leqslant bN_1(x)$$

  On a alors forcément $a>0$ et $b>0$ puis $\frac{1}{a}N_1(x)\leqslant N_2(x)\leqslant bN_1(x)$.

- ◇ Pour montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, on cherche une suite de vecteurs non nuls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)}=+\infty\quad \textbf{OU}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)}=+\infty$$

Propriété [I.3] : Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors

1. si X est une partie de E,

X est bornée pour N_1 si et seulement si X est bornée pour N_2

2. si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de vecteurs de E,

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour N_2

Remarque(s) :

(I.21) On peut même vérifier que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si toute partie X de E bornée pour N_1 et une partie bornée pour N_2, ie les parties bornées pour N_1 et N_2 sont exactement les mêmes.

Théorème [I.4] : (Équivalence des normes en dimension finie)
Si E est un espace vectoriel **de dimension finie** alors

toutes les normes sur E sont équivalentes.

Conséquence [I.5] : Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(n)e_i$. Alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si les p suites $(u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées.

Remarque(s) :

(I.22) Une suite de polynômes de $\mathbb{K}_p[X]$ est bornée si et seulement si les $p+1$ suites de ses coefficients sont bornées.

(I.23) Une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est bornée si et seulement si les p^2 suites de ses coefficients sont bornées.

II Suites dans un espace vectoriel normé

1. Suites convergentes

Définition : Soient $(E, \| \, \|)$ un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E et $\ell \in E$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers** ℓ (ou tend vers ℓ) si $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - \ell\| = 0$, ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow \|u_n - \ell\| < \varepsilon$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite dans E, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **convergente**.
Dans le cas contraire, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **divergente**.

Remarque(s) :

(II.1) La définition de limite dépend de la norme donc la nature et l'éventuelle limite d'une suite dépendent de la norme de E : si on considère la suite de polynômes définie par $P_n = \left(\dfrac{X}{2}\right)^n$ alors

a) (P_n) tend vers 0 pour $N_0 : P \mapsto |P(0)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

b) (P_n) tend vers 1 pour $N_2 : P \mapsto |P(2)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

c) (P_n) diverge pour $N_4 : P \mapsto |P(4)| + \displaystyle\int_0^1 |P'(t)| \, \mathrm{d}t$.

Propriété [II.1] : **(Unicité de la limite)**
Soit (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$ convergente. Le vecteur $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ est alors unique.

Remarque(s) :

(II.2) Dans cette dernière propriété, on suppose évidemment que la norme sur E est fixée : la limite est donc unique pour une norme donnée sur E.

Exemple(s) :

(II.3) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ alors $A_n = A + \dfrac{1}{n} I_p$ tend vers A (quelle que soit la norme choisie sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$)

(II.4) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est limite d'une suite de matrices inversibles.

Propriété [II.2] : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E, espace vectoriel muni d'une norme $\| \, \|$, et $\ell \in E$.

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ alors la suite réelle $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel $\|\ell\|$.

Remarque(s) :

(II.5) La réciproque de cette propriété est bien sûr fausse.

(II.6) On peut utiliser cette propriété par contraposée : si la suite réelle $(\|u_n\|)$ diverge alors la suite de vecteurs (u_n) diverge aussi.

Conséquence **[II.3] :** Soit (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) est convergente alors (u_n) est bornée.

Remarque(s) :

(II.7) Dans cette propriété, la norme est toujours la même : si (u_n) converge pour une norme N sur E alors la suite (u_n) est bornée pour cette même norme N.

Propriété **[II.4] :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ qui converge vers $\ell \in E$. Toute suite extraite de (u_n) converge aussi vers ℓ.

Exemple(s) :

(II.8) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. On suppose que la suite (A^n) converge vers $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors B est une matrice de projecteur.

Propriété **[II.5] :** Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. Si N_1 et N_2 sont équivalentes alors

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2.

Remarque(s) :

(II.9) On peut aussi prouver que N_1 et N_2 sont équivalentes si et seulement si toute suite convergente pour N_1 est aussi une suite convergente pour N_2.

(II.10) Cette propriété peut aussi servir à prouver que deux normes ne sont pas équivalentes : si on trouve une suite (u_n) qui converge pour N_1 et pas pour N_2 (ou qui convergent pour les deux normes mais pas vers la même limite) alors les normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes.
En étudiant $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $f_n(t) = t^n$, montrer que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ ne sont pas équivalentes sur $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

Théorème **[II.6] :** Soient E un espace vectoriel **de dimension finie**, N_1 et N_2 deux normes sur E, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in E$.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_1 si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ pour N_2

Remarque(s) :

(II.11) Cela signifie que, si E est de dimension finie, la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la valeur de sa limite (si elle existe) ne dépendent pas de la norme sur E que l'on choisit.

Conséquence **[II.7] :** Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $E^{\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} u_i(n)e_i$. Alors

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si les p suites $(u_1(n))_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (u_p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

Dans ce cas, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim_{n\to\infty} u_i(n)\right) e_i$$

Remarque(s) :

(II.12) Une suite de polynômes de $\mathbb{K}_p[X]$ converge si et seulement si les $p+1$ suites de ses coefficients convergent.

(II.13) Une suite de matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ converge si et seulement si les p^2 suites de ses coefficients convergent.

(II.14) Pour étudier une suite de vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme à utiliser.

Exemple(s) :

(II.15) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$; étudier la nature des suites (A^n) et (S_n), où $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$.

(II.16) Pour $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, on définit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pour toute matrice A.

2. Propriétés des suites convergentes

Propriété [II.8] : (Linéarité de la limite)
Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé.

1. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} (\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} u_n + \beta \lim_{n\to\infty} v_n$$
2. L'ensemble des suites de $E^{\mathbb{N}}$ convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ sur lequel l'application définie par $(u_n) \mapsto \lim_{n\to\infty} u_n$ est linéaire.

Attention : Ne pas écrire $\lim(\alpha u_n + \beta v_n) = \alpha \lim u_n + \beta \lim v_n$ *sans avoir vérifié (avant) que (u_n) et (v_n) sont convergentes.*

Propriété [II.9] : (Produit par une suite scalaire)
Soient $(E, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé, (u_n) une suite de $E^{\mathbb{N}}$ et (λ_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si (u_n) et (λ_n) convergent alors $(\lambda_n u_n)$ converge et
$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n u_n = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \times \lim_{n\to\infty} u_n$$

Attention : Les produits et quotients de suites n'ont pas de sens pour deux suites à valeurs vectorielles, les limites infinies n'ont de sens que pour les suites à valeurs réelles.

Exemple(s) :

(II.17) Soient $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui convergent respectivement vers L_A et L_B.
Montrer que la suite $(A_k B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $L_A L_B$.
En déduire que si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, A_k est inversible et si la suite $(A_k^{-1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors L_A est inversible et $\lim_{k\to+\infty} \left(A_k^{-1}\right) = L_A^{-1}$.

(II.18) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $2A^3 + A^2 - 2A - I_n = 0$. Justifier que la suite $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par $U_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A^j$ converge.
La suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est elle convergente ?