TD15 : Intégrales à paramètres

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2024)**

Soient $x > -1$ et $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(1 + x\sin^2 t)\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$

2. Calculer $f'(x)$ en utilisant le changement de variable $u = \dfrac{1}{\tan t}$

3. En déduire la valeur de f

Exercice 2 **(CCEM PSI 2024)**

On considère $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + x^2t^2)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

3. Calculer $f'(x)$ puis $f(x)$.

Exercice 3 **(CCINP PSI 2024)**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} e^{-xt}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

4. Calculer les limites en $+\infty$ de f et f'

5. Montrer que, pour $x > 0$, $f'(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$

6. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I en fonction de $f(0)$ puis déterminer sa valeur.

Exercice 4 **(Mines-Télécom PSI 2019)**

1. Énoncer le théorème de dérivation des intégrales à paramètres

2. Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{ch}(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f est la valeur de $f(x)$ en fonction de $f(0)$. *(*)*

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2023)**

Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1 + t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{(1 + t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Calculer $F(0)$

2. Montrer que G est définie et continue sur $\mathbb{R}^+$

3. Montrer que $F(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{x^2 + t^2}\,\mathrm{d}t$ si $x > 0$

4. En déduire que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $F'(x) = \dfrac{F(x) - 2G(x)}{x}$ pour $x > 0$

5. Montrer que G est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $G'(x) = -\dfrac{x}{2}F(x)$

6. Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par F et en déduire la valeur de F

Exercice 6 **(Mines-Ponts PSI 2024)**

Soient $\alpha > 0$ et $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{x^\alpha + t^4}$

1. Montrer que I est définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

2. Trouver les limites et des équivalents de I en 0 et $+\infty$. *(*)*

Indications

Exercice 4

3. *IPP*

Exercice 6

2. *Pour l'équivalent en* 0*, poser* $u = x^{-\alpha/4}t$.