Séries entières

La notation $\mathbb{K}$ désigne soit le corps des nombres réels, soit le corps des nombres complexes.

I Convergence d'une série entière

1. Rayon de convergence

Définition : Une **série entière** (de variable complexe) est une série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ telle que :

$$\exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n(z) = a_n z^n$$

Les a_n, $n \in \mathbb{N}$, sont les **coefficients** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.
Une série entière de variable réelle est une série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, où $x \in \mathbb{R}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Exemple(s) :

(I.1) Les polynômes.

(I.2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ pour $|z| < 1$.

(I.3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Définition [I.1] : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ le « réel » R défini par :

$$R = \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+, (a_n \rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\} \in [0, +\infty].$$

Remarque(s) :

(I.4) On a donc $R = +\infty$ si, pour tout $\rho \in \mathbb{R}^+$, la suite $(a_n\rho^n)$ est bornée ; ex : si $a_n = \dfrac{1}{n!}$.

(I.5) Si la suite (a_n) est bornée, on a $R \geqslant 1$ par définition de R ; on en déduit que si (a_n) converge alors $R \geqslant 1$. Mais on peut avoir $R = 1$ même si la suite (a_n) diverge (ex : $a_n = n$).

(I.6) Plus généralement, si, pour $z \in \mathbb{C}$, on a
- ⋆ $(a_n z^n)$ bornée alors $|z| \leqslant R$
- ⋆ $(a_n z^n)$ non bornée alors $R \leqslant |z|$.

(I.7) $\left\{ \rho \in \mathbb{R}^+, (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}^+$ qui contient 0 donc on a :

$$\left\{ \rho \in \mathbb{R}^+, (a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\} = \begin{cases} [0, R[\text{ si } (a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas bornée} \\ [0, R] \text{ si } (a_n R^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \end{cases}$$

Conséquence **[I.2] :** Si $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$R = 1$$

Propriété **[I.3] :** **(Lemme d'Abel)**
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$.

Si la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \rho$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge absolument

Théorème **[I.4] :** Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, R le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $z \in \mathbb{C}$.

1. Si $|z| < R$ alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

2. Si $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est grossièrement divergente, ie la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.

Remarque(s) :

I.8 On appelle disque ouvert de convergence, pour une série entière de variable complexe, le disque ouvert de centre 0 et de rayon R, ie $B(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$; pour une série entière de variable réelle, l'intervalle $]-R,R[$ est appelé intervalle ouvert de convergence. Une série entière est donc toujours définie au moins sur son disque ouvert (ou intervalle ouvert) de convergence, mais elle peut aussi être définie en certains points du disque fermé de rayon R, ie en certains points z tels que $|z| = R$ (ou en $\pm R$ pour une série de variable réelle).

I.9 Le domaine de convergence D de cette série de fonctions vérifie donc

$$B(0,R) \subset D \subset B_f(0,R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant R\}$$

Pour une série entière de variable réelle, on a $]-R,R[\subset D \subset [-R,R]$

I.10 On a aussi $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}^+, \exists z \in \mathbb{C}, |z| = r \text{ et } \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n \text{ converge}\right\}$.

I.11 Si $|z| = R$, on ne peut a priori rien dire sur la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$: $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n}$ converge pour $z = -1$ et diverge pour $z = 1$, $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^n}{n^2}$ converge pour $|z| = 1$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} z^n$ diverge pour $|z| = 1$.

Conséquence **[I.5] :** Soit $z \in \mathbb{C}$,

1. si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ converge alors $|z| \leqslant R$

2. si $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ diverge alors $R \leqslant |z|$.

Propriété **[I.6] :** Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

1. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} O(|b_n|)$ (donc si $|a_n| \leqslant |b_n|$ ou si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(|b_n|)$) alors $R_b \leqslant R_a$.

2. Si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors $R_a = R_b$.

Propriété [I.7] : (Règle de d'Alembert)
Soient (a_n) une suite de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de termes <u>non nuls</u> et R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$.

$$\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \ell \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\} \ \underline{\textbf{alors}}\ R = \frac{1}{\ell}$$

Remarque(s) :

(I.12) Cela signifie que si $\ell = 0$ alors $R = +\infty$ et si $\ell = +\infty$ alors $R = 0$.

Attention :

1. *On ne peut appliquer cette propriété que si la série est de la forme $\sum a_n z^n$ donc pas à $\sum a_n z^{2n}$ par exemple (ou toute autre série « lacunaire »).*
2. *La règle de d'Alembert n'est pas une équivalence : si le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est $R > 0$, même si (a_n) ne s'annule pas, il se peut que la suite $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ n'ait pas de limite ; ex : $a_n = n^{(-1)^n}$.*
   La règle de d'Alembert est donc rarement utilisable pour des exercices « théoriques » sur les rayons de convergence.

Exemple(s) :

(I.13) Méthodes de détermination du rayon de convergence :

a) Utilisation de la règle de d'Alembert : $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$.

b) Utilisation d'équivalents : pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $Q \neq 0$ $\sum_{n\geqslant n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n$.

c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{p_n^n}$ où $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite des nombres premiers.

d) Utilisation de la définition : $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ avec a_n la $n^{\text{ème}}$ décimale du nombre π.

2. Opérations sur les séries entières

Propriété [I.8] : (Somme de séries entières)
Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement. Si R_{a+b} est le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} (a_n + b_n) z^n$ alors on a

$$R_{a+b} \geqslant \min(R_a, R_b).$$

Si de plus $R_a \neq R_b$ alors $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$.

Remarque(s) :

(I.14) Si $R_a = R_b$ alors on ne peut pas donner la valeur exacte de R_{a+b} a priori : $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) z^n$ ou $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\right) z^n$ ou $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{n} + e^{-n} - \frac{1}{n}\right) z^n$.

Propriété [I.9] : **(Produit de Cauchy de séries entières)**
Soient $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_a et R_b respectivement. Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite produit de Cauchy de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ie $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors le rayon R_{a*b} de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ vérifie

$$R_{a*b} \geqslant \min(R_a, R_b).$$

Remarque(s) :

(I.15) Même si $R_a \neq R_b$, on peut avoir $R_{a*b} \neq \min(R_a, R_b)$: $(1-z) \times \dfrac{1}{(1-z)(2-z)}$

Propriété [I.10] : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On note respectivement R_a, $R_{a'}$ et R_A les rayons de convergence des trois séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_{n-1}}{n} z^n$. Alors

$$R_a = R_{a'} = R_A.$$

Remarque(s) :

(I.16) Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $R\left(\sum a_n z^n\right) = R\left(\sum n^\alpha a_n z^n\right)$

II Somme d'une série entière

1. Continuité de la somme

Théorème [II.1] : Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si $R > 0$ alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de l'intervalle ouvert de convergence, ie

$$\sum a_n x^n \textbf{ converge normalement sur tout segment } [-a, a] \subset]-R, R[,$$

(donc avec $0 \leqslant a < R$).

Attention : Il n'y a pas convergence normale, ni uniforme, sur l'intervalle ouvert $]-R, R[$ *; c/ex :* $\sum_{n\geqslant 0} x^n$.

Conséquence [II.2] : Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Si $R > 0$ alors la somme $S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur l'intervalle **ouvert** $]-R, R[$.

Remarque(s) :

(II.1) Comme on l'a vu précédemment, le domaine de définition de S vérifie $]-R, R[\subset D_S \subset [-R, R]$.

(II.2) On peut aussi avoir continuité en certains points du segment $[-R, R]$: $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n}$.

(II.3) Si la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n R^n$ est absolument convergente alors $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-R, R]$ donc la somme est continue sur le segment $[-R, R]$; ex : $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$.

Propriété [**II.3**] **:** Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ une série entière de variable complexe et de rayon R. Si $R > 0$ alors la somme $S : z \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur le disque <u>ouvert</u> de convergence, ie sur $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$

Conséquence [**II.4**] **:** Les coefficients d'une série entière de rayon $R > 0$ sont uniques.

2. Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle

Propriété [**II.5**] **:** Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme définie par $f : x \in]-R, R[\longmapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1. Pour tout $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in]-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}[^{\mathbf{2}}$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_a^b$.
2. La primitive F de f nulle en 0 est somme sur $]-R, R[$ d'une série entière :

$$\forall \boldsymbol{x} \in]-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}[, F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

Conséquence [**II.6**] **:** Soient $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et f sa somme sur $]-R, R[$.
Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\boldsymbol{R}, \boldsymbol{R}[$ et si $p \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x \in]-R, R[, f^{(p)}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p} = \sum_{n=p}^{+\infty} \frac{n!}{(n-p)!} a_n x^{n-p} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+p)!}{n!} a_{n+p} x^n\end{aligned}$$

En particulier, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

<u>Exemple(s) :</u>

(*II.4*) Pour $p \in \mathbb{N}$, on a : $\forall x \in]-1, 1[, \dfrac{1}{(1-x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} x^n$.

III Fonctions développables en série entière

1. Série de Taylor d'une fonction de variable réelle

Définition : Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur et $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$. On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$]-r, r[\subset I \quad \text{et} \quad \forall x \in]-r, r[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque(s) :

III.1 Cela signifie en particulier que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est au moins égal à r.

III.2 Si f est paire (resp. impaire) et développable en série entière alors $a_{2n+1} = 0$ (resp. $a_{2n} = 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Propriété [III.1] : Soient f et g deux fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$.

1. Si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha f + \beta g$ est développable en série entière sur $]-r, r[$:
Si, pour $x \in]-r, r[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors

$$\forall x \in]-r, r[, \alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

2. $f \times g$ est développable en série entière sur $]-r, r[$:
Si, pour $x \in]-r, r[$, on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors

$$\forall x \in]-r, r[, f(x) \times g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \text{ avec } \forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

L'ensemble des fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(]-r, r[, \mathbb{K})$, stable par produit.

Exemple(s) :

III.3 Pour $p \in \mathbb{N}$, on a, pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$, $\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$.

III.4 Toute fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas en 0 est développable en série entière.

Attention : Pour appliquer la formule du produit de Cauchy, les deux séries doivent obligatoirement être de la forme $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$ (donc commencer en $n = 0$ et avec tous les termes z^n)

Propriété [III.2] : Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$: $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ Alors

1. Toute primitive F de f sur I est développable en série entière sur $]-r, r[$:

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n, \text{ pour } x \in]-r, r[$$

2. Toutes les dérivées de f sont développables en série entière sur $]-r, r[$: si $p \in \mathbb{N}$,

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-p+1) a_n x^{n-p}, \text{ pour } x \in]-r, r[$$

Exemple(s) :

III.5 On en déduit $-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour $|x| < 1$.

Propriété **[III.3] :** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$. Alors on a équivalence de :

i. f est développable en série entière

ii. $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ et $\forall x \in]-r, r[, f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Le développement en série entière d'une fonction f est, s'il existe, unique.

La série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ est appelée **série de Taylor de** f **en** 0.

Remarque(s) :

(III.6) Cela signifie en particulier que toute fonction développable en série entière sur $]-r, r[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, cela permet donc de prouver qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exemple(s) :

(III.7) Vérifier que $f : x \mapsto \dfrac{-\ln(1-x)}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Conséquence **[III.4] :** Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ dont 0 est un point intérieur, $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et $r > 0$. Alors f est développable en série entière si et seulement si $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ et

$$\forall x \in]-r, r[, \lim_{n \to +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t = 0$$

Remarque(s) :

(III.8) Il ne faut pas confondre le reste de Taylor $R_n(x) = f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t$ (qui existe si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I contenant x) et le reste de la série de Taylor défini par $\widetilde{R}_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ (qui existe si la série de Taylor de f est convergente au point x).
Si f est développable en série entière sur $]-r, r[$, les deux restes sont égaux pour $x \in]-r, r[$ et tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(III.9) Il existe des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ pour lesquelles la série de Taylor converge mais pas vers f : $f(x) = \exp\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

(III.10) Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour lesquelles la série de Taylor est divergente pour $x \neq 0$ (cf feuille d'exercices).

Exemple(s) :

(III.11) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-r, r[, \mathbb{R})$ paire (ou impaire) telle que, sur $[0, r[$, on ait $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)} \geqslant 0$. Montrer que f est développable en série entière.

2. Fonctions usuelles

Propriété [III.5] **:**

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, le rayon de convergence étant $+\infty$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, le rayon de convergence étant $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, le rayon de convergence étant $+\infty$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, le rayon de convergence étant $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, le rayon de convergence étant $+\infty$.

4. $\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, le rayon de convergence étant 1.

$\forall x \in]-1,1[, \displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$, le rayon de convergence étant 1.

5. $\forall x \in]-1,1[, \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$, le rayon de convergence étant 1.

$\forall x \in]-1,1[, \ -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, le rayon de convergence étant 1.

$\forall x \in]-1,1[, \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, le rayon de convergence étant 1.

6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\forall x \in]-1,1[, (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, le rayon de convergence étant 1 si $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $+\infty$ si $\alpha \in \mathbb{N}$.

Exemple(s) :

III.12 $\forall x \in]-1,1[, \arccos(x) = \displaystyle\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{4^{-n}}{2n+1} x^{2n+1}$.

3. Exponentielle complexe

Définition : Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $\exp(z) = e^z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$. Le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$.

Propriété [III.6] **:**

1. $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2, \exp(z+z') = \exp(z) \times \exp(z')$.

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \exp(x+iy) = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $f_z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie par $\forall t \in \mathbb{R}, f_z(t) = \exp(tz)$. Alors f_z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et f_z est la solution de $\begin{cases} y' = z \times y \\ y(0) = 1 \end{cases}$

4. Exercices

Exemple(s) :

- *III.13* Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^3 x^n$.
- *III.14* Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n$.
- *III.15* Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(2n+1)}$.
- *III.16* Montrer que $f : x \longmapsto e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière.
- *III.17* Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(1 + x\sin t)\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.