

## I Espaces préhilbertiens réels

### 1. Espaces préhilbertiens réels

- a) produit scalaires, identités remarquables ( $\|u \pm v\|^2$ ) et identités de polarisation, inégalités de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire, cas d'égalités. Exemples à connaître : produits scalaires canoniques sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t) dt$  sur  $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ .
- b) Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, unitaires, famille orthogonale, orthonormale, liberté d'une famille orthogonales de vecteurs non nuls, théorème de Pythagore, sous-espaces orthogonaux, somme directe orthogonale de sev, orthogonal d'une partie quelconque, propriétés ( $X^\perp$  est un sev,  $X^\perp = \text{Vect}\{X\}^\perp$ ,  $X \subset Y \Rightarrow Y^\perp \subset X^\perp$ ,  $X \cap X^\perp \subset \{0\}$  et  $X \subset (X^\perp)^\perp$ )

### 2. Espaces euclidiens

- a) Bases orthonormée, procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, base adaptée à une somme directe orthogonale, expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.
- b) Formes linéaires et hyperplans : représentation d'une forme linéaire ( $a \in E \mapsto (a|.)$ ) est un isomorphisme de  $E$  sur  $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , vecteur normal à un hyperplan, équation cartésienne dans une base orthonormale d'un hyperplan.
- c) Projecteurs orthogonaux : supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie dans un espace préhilbertien, dimension du supplémentaire orthogonal dans un espace euclidien, expression de la projection orthogonale sur  $F$  de dimension finie à l'aide d'une base orthonormée de  $F$ , distance à un sev de dimension finie (atteinte en un point unique), cas des droites et des hyperplans (dont on connaît un vecteur normal).

## II Intégrales à paramètres

### 1. Théorème de continuité (avec domination sur tout segment) et théorème de convergence dominée à paramètre continu

### 2. Théorèmes de dérivation : classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^k$ (avec domination sur tout segment)

À suivre : le début des evn.