

## PSI2. Devoir en classe n°4. 4h . Samedi 10 janvier 2026.

### Proposition de solution.

#### Problème 1. III.A - Estimation de l'anomalie gravitationnelle due à la présence de pétrole.

##### Extrait centrale tsi2021.

**Q32. DESSIN OBLIGATOIRE** non fourni ici .

Interaction électrostatique subie par la charge ponctuelle en A :  $\vec{F}_e = \frac{q_A q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3}$ .

Interaction gravitationnelle subie par la masse ponctuelle en A :  $\vec{F}_g = -m_A m_B G \frac{\vec{BA}}{\|\vec{BA}\|^3}$ .

**Q33.** On peut dresser les analogies suivantes :

électrostatique	gravitation
charge $q$	masse $m$
champ $\vec{E}$	champ $\vec{g}$
constante $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	constante $-G$

En utilisant cette analogie, le théorème de Gauss  $\Phi_e = \int_{\Sigma} \vec{E} \cdot d^2S = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$  s'écrit donc pour le champ gravitationnel :  $\Phi_g = \iint_{\Sigma} \vec{g} \cdot d^2S = -4\pi G M_{int}$ .

**Q34.** On raisonne sur les symétries puis invariances :

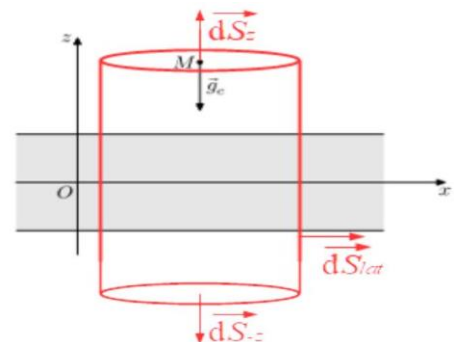
- Tout plan  $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour la distribution de masse (car on néglige les effets de bords) donc pour le champ  $\vec{g}_c$  donc  $\vec{g}_c \cdot \vec{u}_y = 0$ .
- Tout plan  $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est un plan de symétrie pour la distribution de masse (car on néglige les effets de bords) donc pour le champ  $\vec{g}_c$  donc  $\vec{g}_c \cdot \vec{u}_x = 0$ .
- Comme la distribution de masse est supposée infiniment étendue dans les direction  $(Ox)$  et  $(Oy)$ , il y a invariance par translation dans ces deux direction et  $g_c(x, y, z)$  ne dépend respectivement ni de  $x$  ni de  $y$ .

Finalement, on a donc  $\vec{g}_c(M) = g_c(z)\vec{u}_z$ . En outre, le plan  $(Oxy)$  est un plan de symétrie pour la distribution de masses, donc pour le champ donc la fonction  $g_c(z)$  est impaire.

**Q35.**

On choisit comme surface de Gauss un cylindre d'axe  $(Oz)$ , de section  $S$ , situé entre les plan  $z$  et  $-z$ .

On s'intéressera au cas où  $z > H/2$ . (cf. ci-contre)



Calculons le flux :

$$\begin{aligned} \Phi_g &= \iiint_{\Sigma} \vec{g}_c \cdot d\vec{S} = \iint_{S_z} g_c(z)\vec{u}_z \cdot dS\vec{u}_z + \iint_{S_{-z}} g_c(-z)\vec{u}_z \cdot dS(-\vec{u}_z) \\ &\quad + \iint_{S_{lat}} g_c\vec{u}_z \cdot dS_{lat}(\alpha\vec{u}_x + \beta\vec{u}_y) = g_c(z) \cdot S - g(-z) \cdot S = 2g_c(z) \cdot S \end{aligned}$$

en utilisant l'impairité de la fonction.

La masse intérieure vaut alors  $M_i = \rho_c SH$ .

On a alors, d'après le théorème de Gauss :  $2g_c(z) \cdot S = -4\pi G \rho_c S \cdot H$

Wie Gott in Frankreich.

Finalement :  $g_c = -2\pi G \rho_c H$  pour  $z > H/2$ . CQFD

**Q36.** On en déduit que l'anomalie gravitationnelle due à la présence de la nappe de pétrole vaut :  $\Delta g = 2\pi G(\rho_c - \rho_p)H$ . Numériquement :  $\Delta g \approx 1,68 \times 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## **Problème 2. Extrait centrale mp 2023.**

### **A - Un miroir pour les ondes électromagnétiques**

**Q 1.** Équations de Maxwell :

$$\text{Maxwell-Gauss } \text{div } \vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}$$

$$\text{Maxwell-Thomson } \text{div } \vec{B}(M, t) = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \left( \vec{J}(M, t) + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t) \right)$$

Dans une région vide de charges, elles deviennent :

$$\text{Maxwell-Gauss } \text{div } \vec{E}(M, t) = 0$$

$$\text{Maxwell-Thomson } \text{div } \vec{B}(M, t) = 0$$

$$\text{Maxwell-Faraday } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}(M, t) = -\frac{\partial \vec{B}(M, t)}{\partial t}$$

$$\text{Maxwell-Ampère } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}(M, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}(M, t)$$

**Q 2.** Comme  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , on a  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B})}{\partial t}$

par permutation des dérivées spatiale et temporelles (théorème de Schwarz).

De plus  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\Delta \vec{E}$  dans le vide. Avec l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient donc

$$-\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

d'où, comme  $\mu_0 \epsilon_0 c^2 = 1$ ,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

**Q3.** Le direction de propagation de l'onde de la forme  $\vec{E}_i(M, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$  est selon l'axe  $Ox$ .

En considérant  $k > 0$ , l'onde se propage selon  $\vec{u}_x$ .

L'onde est polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$ .

Écrivons que le champ vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_0 \cos(\omega t - kx) = 0, \forall (x, t)$$

Comme  $E_0 \neq 0$ , on en déduit la relation de dispersion (l'autre solution est évacuée)

$$k = \frac{\omega}{c}$$

**Q 4.** Le conducteur parfait correspond au cas théorique limite d'une conductivité électrique infinie :  $\gamma \rightarrow \infty$ .

À l'intérieur d'un conducteur idéal, le champ électrique est nul:  $\vec{E}(M, t) = \vec{0}$ .

**Q5.** Écrivons la relation de passage en ne prenant en compte que le champ incident donné. Le milieu (1) est le vide, le milieu (2) le conducteur (donc  $\vec{E}_2 = \vec{0}$ , et  $\vec{n}_{1 \rightarrow 2} = \vec{e}_x$ , d'où <sup>1</sup>

$$\vec{0} - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y = \frac{\sigma(M, t)}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

En projetant selon  $\vec{u}_y$ , on obtient

$$E_0 \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$$

Comme  $E_0 \neq 0$ , cette condition ne peut être vérifiée.

Le champ électrique donné ne vérifie pas la relation de passage.

Il existe donc un champ  $\vec{E}_r(M, t)$ , tel que le champ total  $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_i(M, t) + \vec{E}_r(M, t)$  vérifie la relation de passage.

À l'interface  $x = 0$ , on a donc

$$\vec{0} - E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y - \vec{E}_{0r} \cos(\omega' t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \vec{u}_x$$

En projetant selon  $\vec{u}_x$ , on obtient

$$-\vec{E}_{0r} \cdot \vec{u}_x \cos(\omega' t) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

On peut a priori écrire

$$\vec{E}_r = E_{0r,x} \cos(\omega' t + k' x) \vec{u}_x + E_{0r,y} \cos(\omega' t + k' x) \vec{u}_y$$

Dans le vide, on a alors d'après l'équation de Maxwell-Gauss

$$\text{div } \vec{E} = -E_{0r,x} k' \sin(\omega' t + k' x) = 0 \quad \forall t, x$$

ce qui impose  $E_{0r,x} = 0$ , et donc  $\sigma = 0$  à la surface du conducteur. On a donc  $E_{0r,y} = E_{0r}$  et la relation de passage s'écrit en projection selon  $\vec{u}_y$

$$0 - E_0 \cos(\omega t) - E_{0r} \cos(\omega' t) = 0 \quad \forall t.$$

On en déduit  $E_{0r} = -E_0$  et  $\omega' = \omega$ . La relation de dispersion donne  $k' = \omega'/c = \omega/c = k$ .

On a finalement  $\vec{E}_r = -E_0 \cos(\omega t + kx) \vec{u}_y$ .

Cette onde se propage dans le sens des  $x$  décroissants et est polarisée rectilignement selon  $\vec{u}_y$ .

**Q 6.** Le champ électrique résultant est donné par

$$\vec{E}(M, t) = (E_0 \cos(\omega t - kx) - E_0 \cos(\omega t + kx)) \vec{u}_y$$

soit

$$\vec{E}(M, t) = 2E_0 \sin(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_y.$$

On obtient le champ  $\vec{B}$  avec l'équation de Maxwell-Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial E}{\partial x} \vec{u}_z = -2E_0 k \cos(kx) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

On intègre par rapport à  $t$ , en prenant nulle la constante d'intégration (un terme constant n'a pas de caractère ondulatoire) :

$$\vec{B}(M, t) = 2E_0 \frac{k}{\omega} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

soit comme  $\omega = kc$

$$\vec{B}(M, t) = 2 \frac{E_0}{c} \cos(kx) \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

L'onde correspondante est une onde stationnaire, les champs électrique et magnétique étant en quadrature spatiale et temporelle.

**Q 7.** La tension mesurée s'annule quand  $\vec{E} = \vec{0}, \forall t$ , soit aux points tels que  $\sin(kx) = 0$ . Les abscisses correspondantes vérifient donc  $kx = n\pi$ , avec  $n \in \mathbb{Z}$ . Entre deux annulations successives, on a, comme  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,

$$\Delta x = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

Entre 4 annulations, on mesure

$$4 \frac{\lambda}{2} = (42,8 - 37,3) \text{ cm} = 5,5 \text{ cm}$$

d'où  $\lambda = 2,75$  cm. De  $f = c/\lambda$  on déduit  $f = 10,9$ GHz.

**Q 8.** On a déduit  $\lambda$  de la mesure des positions  $x_0$  et  $x_4$  des annulations extrêmes sur la courbe expérimentale.

La graduation est de 1 mm, d'où une incertitude relative  $u(x_0) = u(x_4) = \frac{0,5 \text{ mm}}{\sqrt{3}}$ .

On en a déduit la longueur  $L = x_4 - x_0$ , d'où l'incertitude correspondante :

$$u(L)^2 = u(x_0)^2 + u(x_4)^2$$

soit

$$u(L) = \sqrt{2}u(x_0) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}0,5 \text{ mm} = 0,41 \text{ mm}$$

On en a déduit la longueur d'onde  $\lambda = 2L/4 = L/2$ , d'où

$$u(\lambda) = \frac{u(L)}{2} = 0,21 \text{ mm}$$

La fréquence est donnée par  $f = \frac{c}{\lambda}$ , d'où

$$\frac{u(f)}{f} = \frac{u(\lambda)}{\lambda}$$

On en déduit

$$u(f) = u(\lambda) \frac{f}{\lambda} = 0,21 \frac{10,9}{27,5}$$

soit  $u(f) = 0,08$ GHz.

L'écart normalisé entre la valeur mesurée et celle donnée par le constructeur est donné par

$$\sigma = \frac{11,0 - 10,9}{\sqrt{(0,6)^2 + (0,08)^2}} = 0,17$$

La condition  $\sigma < 2$  est largement vérifiée : la valeur mesurée est bien compatible avec la valeur du constructeur.

### C - Le four à micro-ondes

**Q 29.** Le champ électrique étant nul dans les parois métalliques, la continuité de sa composante tangentielle (relation de passage) implique la nullité de cette composante sur les parois du four.

Compte tenu de la forme du champ, cette condition est déjà vérifiée pour les parois  $x = 0, y = 0$  et  $z = 0$ .

Sur la paroi  $x = a$ , on doit avoir

$$E_y(x = a, y, z, t) = 0 \text{ et } E_z(x = a, y, z, t) = 0 \quad \forall y, z, t$$

soit

$$E_2 \sin(k_x a) \cos(k_y y) \sin(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall y, z, t$$

Et

$$E_3 \sin(k_x a) \sin(k_y y) \cos(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall y, z, t.$$

On en déduit  $\sin(k_x a) = 0$ , soit  $k_x a = m\pi$  avec  $m \in \mathbf{N}$ .

ou  $E_2 = 0$  et  $E_3 = 0$

De même sur la paroi  $y = b$ , on doit avoir

$$E_x(x, b, z, t) = 0 \text{ et } E_z(x, b, z, t) = 0 \quad \forall x, z, t$$

soit

$$E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y b) \sin(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, z, t$$

et

$$E_3 \sin(k_x x) \sin(k_y b) \cos(k_z z) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall y, z, t.$$

On en déduit de même  $\sin(k_y b) = 0$ , soit  $k_y b = n\pi$  avec  $n \in \mathbf{N}$ . Enfin sur la paroi  $z = d$  on doit avoir

$$E_x(x, y, d, t) = 0 \text{ et } E_y(x, y, d, t) = 0 \quad \forall x, y, t$$

soit

$$E_1 \cos(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z d) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, y, t$$

et

$$E_2 \sin(k_x x) \cos(k_y y) \sin(k_z d) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall x, y, t.$$

Wie Gott in Frankreich.

On en déduit de même  $\sin(k_z d) = 0$ , soit  $k_z d = \ell\pi$  avec  $\ell \in \mathbb{N}$ . On conclut donc par

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{et} \quad k_z = \frac{\ell\pi}{d} \quad \text{avec} \quad (m, n, \ell) \in \mathbb{N}^3.$$

**Q 30.** On calcule

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} = -k_x^2 E_x = -\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 E_x$$

On a de même

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 E_y \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = -\left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2 E_z$$

Le champ  $\vec{E}$  vérifie l'équation de propagation

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

soit

$$-\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2\right] \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$$

La pulsation du mode  $(m, n, \ell)$  est donc donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{m,n,\ell} &= c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell\pi}{d}\right)^2} \\ &= c\pi \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}. \end{aligned}$$

Avec  $\omega_{n,m,\ell} = 2\pi f_{n,m,\ell}$  on en déduit la fréquence du mode  $(n, m, \ell)$  :

$$f_{m,n,\ell} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\ell}{d}\right)^2}.$$

**Q 32.** Avec  $\vec{E} = E(x, t)\vec{u}_y$ , l'équation de Maxwell-Faraday donne

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \frac{\partial E(x, t)}{\partial x} \vec{u}_z = \frac{n\pi}{a} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin(\omega t) \vec{u}_z = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{n\pi}{a\omega} E_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z.$$

La relation de dispersion, obtenue à partir de l'équation de d'Alembert, donne  $\omega = \frac{nc\pi}{a}$ , d'où

$$\vec{B} = B_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos(\omega t) \vec{u}_z \quad \text{avec} \quad B_0 = \frac{E_0}{c}$$

**Q 33.** Calcul non demandé : La densité volumique d'énergie dans la cavité est

$$\begin{aligned} \frac{dW}{d\tau} &= \frac{\varepsilon_0 E^2(x, t)}{2} + \frac{B^2(x, t)}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) \\ &\quad + \frac{E_0^2}{2\mu_0 c^2} \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \end{aligned}$$

soit

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \left[ \sin^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin^2(\omega t) + \cos^2\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos^2(\omega t) \right].$$

L'énergie totale est

$$\begin{aligned}
 W(t) &= \int \frac{dW}{d\tau} d\tau = \int_0^a \frac{dW}{d\tau} S dx \\
 &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \int_0^a \left[ \sin^2 \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \sin^2(\omega t) + \cos^2 \left( \frac{n\pi x}{a} \right) \cos^2(\omega t) \right] dx \\
 &= \frac{SB_0^2}{2\mu_0} \left[ \frac{a}{2} \sin^2(\omega t) + \frac{a}{2} \cos^2(\omega t) \right]
 \end{aligned}$$

soit

$$W = \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0}$$

Simple AD pour nous...

L'énergie totale dans la cavité est constante au cours du temps. Ce résultat est attendu car il n'y a aucun phénomène dissipatif pris en compte avec un conducteur parfait.

**Q 34.** Si  $E_0$  est l'amplitude du champ électrique, l'amplitude du courant de conduction est donnée par

$$j_0 = \sigma E_0$$

et l'amplitude du courant de déplacement  $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  est donnée par

$$j_{d,0} = \omega \epsilon_0 E_0 = 2\pi f \epsilon_0 E_0$$

Le courant de déplacement peut être négligé devant le courant de conduction si

$$\frac{j_{d,0}}{j_0} = \frac{2\pi \epsilon_0 f}{\sigma} \ll 1$$

Avec  $\sigma = 1,5 \times 10^6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ , on peut négliger le courant de déplacement si

$$f \ll \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0} = 2,7 \times 10^{16} \text{ Hz}$$

Cette condition est largement vérifiée dans le four à microondes où  $f = 2,45 \times 10^9 \text{ Hz}$ .

**Q 35.** En négligeant le courant de déplacement, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) &= \mu_0 \text{rot} \vec{j} = \mu_0 \sigma \text{rot} \vec{E} \\
 \text{rot}(\text{rot} \vec{B}) &= \text{grad}(\text{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \Delta \vec{E}
 \end{aligned}$$

et l'équation de Maxwell-Faraday

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

on obtient

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \sigma \frac{d\vec{B}}{dt}$$

Il s'agit d'une équation de la diffusion. Sa non invariance par renversement du temps (changement de variable  $t' = -t$ ), du fait de la dérivée temporelle d'ordre impair en  $t$  (premier ordre ici), traduit l'irréversibilité du phénomène.

Une telle équation régit l'évolution de la température dans un milieu siège d'un phénomène de conduction thermique.

**Q 36.** Écrivons que le champ proposé vérifie l'équation précédente :

$$\underline{f''}(x) e^{i\omega t} = \mu_0 \sigma i \omega \underline{f}(x) e^{i\omega t} \quad \forall x, t$$

soit comme  $e^{i\omega t} \neq 0$ ,

$$\underline{f''}(x) - i\omega \mu_0 \sigma \underline{f}(x) = 0$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle linéaire homogène du seconde ordre est

$$r^2 - i\omega \mu_0 \sigma = 0,$$

Wie Gott in Frankreich.

soit

$$r^2 = i\omega\mu_0\sigma = \omega\mu_0\sigma \exp\left(\frac{i\pi}{2}\right)$$

Ses racines sont

$$r_{1,2} = \pm \sqrt{\omega\mu_0\sigma} \exp\left(\frac{i\pi}{4}\right) = \pm \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} (1 + i) = \pm \frac{1 + i}{\delta}$$

en posant

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$$

homogène à une longueur.

On en déduit la solution générale de l'équation différentielle

$$\underline{f}(x) = \underline{A}_1 e^{(1+i)x/\delta} + \underline{A}_2 e^{-(1+i)x/\delta}.$$

Le champ magnétique (et donc  $\text{Re}(\underline{f})$ ) ne peut diverger pour  $x \rightarrow +\infty$ , donc  $\underline{A}_1 = 0$ .

En  $x = 0$ , la continuité du champ magnétique impose

$$\underline{\vec{B}}(x=0, t) = B_0 e^{i\omega t} \vec{u}_z = \underline{f}(0) e^{i\omega t} \vec{u}_z$$

d'où

$$\underline{f}(0) = \underline{A}_1 = B_0.$$

On a donc

$$\underline{f}(x) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta}$$

**Q 37.** Le champ magnétique est donné par la partie réelle de

$$\underline{\vec{B}}(x, t) = B_0 e^{-(1+i)x/\delta} e^{i\omega t} \vec{u}_z = B_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \vec{u}_z$$

soit

$$\vec{B}(x, t) = B_0 e^{-x/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{u}_z$$

Le champ magnétique se propage dans le conducteur dans le sens des  $x$  croissants, avec une amplitude qui décroît exponentiellement sur une longueur caractéristique  $\delta$ , d'autant plus petite que la pulsation est élevée (c'est l'effet de peau;  $\delta$  est alors appelée épaisseur de peau).

Le vecteur densité de courant électrique est donné par l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\begin{aligned} \vec{J}(x, t) &= \frac{1}{\mu_0} \text{rot} \vec{B} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \vec{u}_y \\ &= \frac{B_0}{\mu_0 \delta} e^{-x/\delta} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \vec{u}_y \end{aligned}$$

**Q 38.** La puissance volumique cédée par le champ électromagnétique à un conducteur ohmique a pour expression

$$p(M, t) = \vec{J}(M, t) \cdot \vec{E}(M, t) = \sigma \vec{E}(M, t)^2 = \frac{\vec{J}(M, t)^2}{\sigma}$$

On a donc

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[ \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right]^2 \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[ \cos^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) + \sin^2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] \\ &= \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[ 1 - 2\cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \sin\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \right] = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta} \left[ 1 - \sin\left\{2\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right)\right\} \right]. \end{aligned}$$

La puissance volumique moyenne (temporelle) est donc donnée par

Wie Gott in Frankreich.

$$\langle p(x) \rangle = \frac{B_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} e^{-2x/\delta}$$

On considère une section  $S$  de paroi, dans le demi-espace  $x > 0$  (avec les données relatives au four, on calcule une épaisseur de peau  $\delta = 8,3\mu\text{m}$ , très faible devant l'épaisseur des plaques métalliques des parois, ce qui justifie de pouvoir les considérées comme semi-infinies).

**Q 39.** La puissance moyenne dissipée vaut

$$\begin{aligned} P_1 &= \int_0^{+\infty} \langle p(x) \rangle S dx = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \int_0^{+\infty} e^{-2x/\delta} dx \\ &= \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \delta^2 \sigma} \left[ -\frac{\delta}{2} e^{-2x/\delta} \right]_0^{+\infty} = \frac{SB_0^2}{2\mu_0^2 \sigma \delta} \end{aligned}$$

En prenant en compte les deux parois, on obtient la puissance moyenne totale dissipée  $P = 2P_1$ , soit

$$P = \frac{SB_0^2}{\mu_0^2 \sigma \delta}$$

On élimine sigma à partir de l'expression de l'épaisseur de peau, soit  $\sigma = \frac{2}{\mu_0 \omega \delta^2}$

d'où

$$P = \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}$$

On vérifie par AD.

**Q39bis.** Il ya qd même un petit problème : le calcul a été effectué pour une épaisseur infinie ce qui a permis d'évacuer une solution possible. Et, juste après, l'épaisseur n'est plus infinie...

**Q 40.** On a établi à la question 33 l'expression de l'énergie totale portée par le champ électromagnétique dans la cavité :

$$W = \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0}$$

On suppose cette expression toujours valable malgré la conductivité finie des parois.

L'énergie dissipée dans les parois pendant une période  $T = 2\pi/\omega$  s'exprime en fonction de la puissance  $P$  dissipée :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = PT = \frac{2\pi}{\omega} P = \frac{2\pi}{\omega} \frac{SB_0^2 \omega \delta}{2\mu_0}.$$

Le facteur de qualité vaut donc

$$Q = 2\pi \frac{W}{\mathcal{E}_{\text{diss}}} = 2\pi \frac{B_0^2 S a}{4\mu_0} \frac{\omega}{2\pi} \frac{2\mu_0}{SB_0^2 \omega \delta}$$

soit

$$Q = \frac{a}{2\delta}$$

**Q 41.** On calcule  $\delta = 8,3\mu\text{m}$  pour le four, d'où

$$Q = 2,2 \times 10^4$$

On remarque que  $Q \gg 1$  : l'atténuation est faible.

**Q 42.** En l'absence de rayonnement, la variation de l'énergie électromagnétique contenue dans la cavité est donnée par l'énergie absorbée dans les parois. Entre  $t$  et  $t + T$ , le bilan d'énergie pour la cavité s'écrit donc

$$W(t + T) - W(t) = -\mathcal{E}_{\text{diss}} = -2\pi \frac{W(t)}{Q}$$

Comme  $Q \gg 1$ , la variation relative d'énergie sur une période est très faible et on peut assimiler le taux de variation à une dérivée :

$$\frac{dW}{dt} \approx \frac{W(t + T) - W(t)}{T} = -2\pi \frac{W(t)}{QT}$$

Wie Gott in Frankreich.



Avec  $T = 2\pi/\omega$ , on obtient

$$\frac{dW}{dt} + \frac{\omega}{Q} W(t) = 0$$

L'énergie décroît de façon exponentielle selon la loi

$$W(t) = W(0)e^{-t/\tau}$$

avec une constante de temps

$$\tau = \frac{Q}{\omega}$$

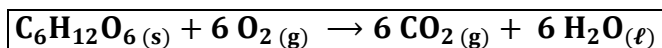
**Q 43.** On calcule  $\tau = 1,4\mu s$ .

La décroissance du champ présent dans la cavité lorsque l'on coupe le klystron se fait avec une durée bien plus faible que la durée typique d'un péritio. Le champ restant dans la cavité après ouverture de la porte ne permet pas d'expliquer l'observation des péritios.

Une étude plus poussée a montré que la source des péritios était le magnétron du four (source du champ magnétique) : un certain type de magnétron provoquerait l'émission des péritios. Cependant, la variation fréquentielle observée lors de l'émission reste inexpliquée.

### **Problème 3. Dosage du glucose contenu dans une boisson isotonique**

**Q4.** Réaction de combustion du glucose :



D'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^o = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^o = 1274 - 0 + 6 \times (-393,5) + 6 \times (-285,8) = 1274 - 6 \times 679,3$$

$$\text{D'où : } \Delta_r H^o \approx 1,3 \cdot 10^3 - 6 \times 6,8 \cdot 10^2 = 1,3 \cdot 10^3 - 4,1 \cdot 10^3 = -2,8 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Dans la liste proposée, on choisit donc :  $\boxed{\Delta_r H^o = -2802 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}}$

**Q5.** L'énergie libérée par la combustion est intégralement fournie aux muscles et, en définissant le rendement musculaire par  $\eta = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{\text{muscle}}}$ , on obtient en raisonnant une durée  $\Delta t$  :

$$P_{\text{méca}} \cdot \Delta t = \eta \cdot |Q_{\text{comb}}|$$

Or en considérant la réaction de combustion du glucose isotherme et isobare, on a :

$$\Delta H = Q_{\text{comb}} \Leftrightarrow \xi_f \Delta_r H^o = Q_{\text{comb}} \quad \text{avec : } \xi_f = \frac{m_{\text{gluc}}}{M_{\text{gluc}}}$$

$$\text{D'où : } m_{\text{gluc}} = \xi_f \cdot M_{\text{gluc}} = \frac{Q_{\text{comb}}}{\Delta_r H^o} M_{\text{gluc}} \Leftrightarrow \boxed{m_{\text{gluc}} = -\frac{M_{\text{gluc}} \cdot P_{\text{méca}} \cdot \Delta t}{\eta \cdot \Delta_r H^o}}$$

$$\underline{\text{AN:}} \quad M_{\text{gluc}} = 6 \times 12 + 12 \times 1 + 6 \times 16 = 72 + 12 + 96 = 180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

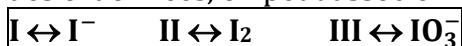
$$m_{\text{gluc}} = \frac{180 \times 180 \times 4 \times 3,6 \cdot 10^3}{0,25 \times 2,8 \cdot 10^6} \approx 670 \text{ g}$$

Dans la liste proposée, on choisit donc :  $\boxed{m_{\text{gluc}} = 670 \text{ g}}$

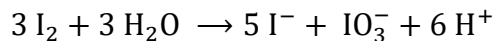
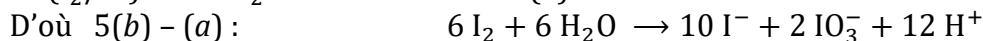
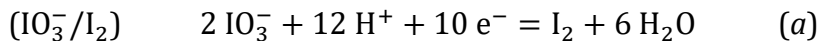
**Q6.** Sachant que  $\text{no}(\text{O}) = -\text{II}$  et en respectant les règles usuelles, on obtient :

espèces	$\text{I}_2$	$\text{IO}_3^-$	$\text{I}^-$
no(I)	0	+V	-I

Les espèces étant placées dans le diagramme E-pH par nombre d'oxydation croissant selon l'axe des ordonnées, on peut associer les domaines :



Au-delà de  $\text{pH}=7,4$ , le diode n'est plus stable et dismute pour former les deux autres ions. On écrit les deux couples :



**Q7.** Le segment BD sépare les domaines I et III, il faut donc considérer le couple ( $\text{IO}_3^-/\text{I}^-$ ) dont la demi-équation électronique est :  $\text{IO}_3^- + 6 \text{H}^+ + 6 \text{e}^- = \text{I}^- + 3 \text{H}_2\text{O}$

La formule de Nernst s'écrit alors :

$$E = E^o + \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-][\text{H}^+]^6}{[\text{I}^-]} \right) = E^o + \frac{0,06}{6} \log([\text{H}^+]^6) + \dots = E^o - 0,06 \text{ pH} + \dots$$

**La pente du segment BD est donc  $-0,06 \text{ V/pH}$**

Le segment CB sépare les domaines II et III, il faut donc considérer le couple ( $\text{IO}_3^-/\text{I}_2$ ) dont la demi-équation électronique est :  $\text{IO}_3^- + 6 \text{H}^+ + 5 \text{e}^- = \frac{1}{2} \text{I}_2 + 3 \text{H}_2\text{O}$

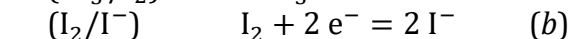
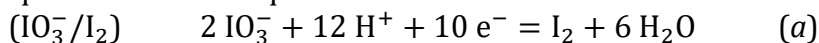
La formule de Nernst s'écrit alors :

$$E = E^o + \frac{0,06}{6} \log \left( \frac{[\text{IO}_3^-][\text{H}^+]^6}{\sqrt{[\text{I}_2]}} \right) = E^o + \frac{0,06}{5} \log([\text{H}^+]^6) + \dots = E^o - \frac{6}{5} \times 0,06 \text{ pH} + \dots$$

**La pente du segment CB est donc  $-0,072 \text{ V/pH}$**

**Q8.** On passe en milieu basique, où le diiode est instable et dismute

Demi-équations électroniques :



Or on se place en milieu basique, on utilise alors l'autoprotolyse de l'eau ( $\text{H}_2\text{O} = \text{H}^+ + \text{OH}^-$ ) pour obtenir et on divise par 2:

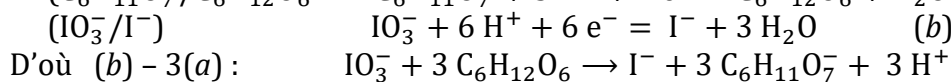
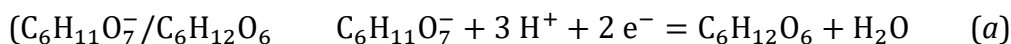


Bilan de matière : la réaction est totale et on a au départ  $C_1 V_1$  mol de  $\text{I}_2$ . On obtient donc

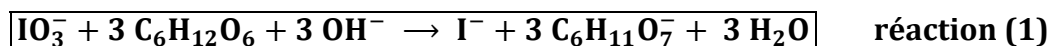
$$\boxed{n(\text{IO}_3^-)_{\text{initial}} = \frac{n(\text{I}_2)_{\text{introduit}}}{3} = \frac{C_1 V_1}{3}}$$

**Q9.** La réaction qui se produit lors de cette étape est lente, il faut donc attendre suffisamment longtemps afin que la réaction soit finie avant de passer à l'opération suivante.

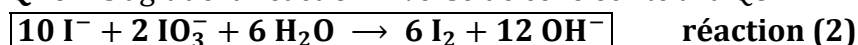
Demi-équations électroniques :



Or on se place en milieu basique, on utilise alors l'autoprotolyse de l'eau ( $\text{H}_2\text{O} = \text{H}^+ + \text{OH}^-$ ) pour obtenir :



**Q10.** Il s'agit de la réaction inverse de celle écrite à la Q8 :

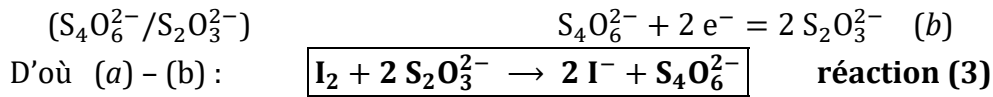


**Q11.**

Demi-équations électroniques :



Wie Gott in Frankreich.



La règle du gamma est vérifiée, de plus  $E^\circ(I_2/I^-) - E^\circ(S_4O_6^{2-}/S_2O_3^{2-}) = 0,59 \text{ V} > 0,3 \text{ V}$  Donc la réaction est quasi-totale.

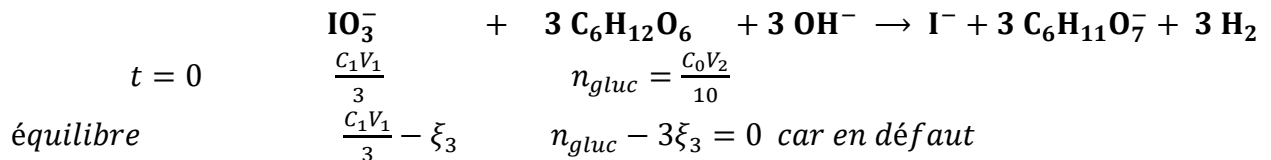
**Q12.** Bilans de matières successifs : toutes les réactions sont totales, le corps en défaut à reconnaître disparaît :

Opération 2 :  $3 I_2 + 6 OH^- \rightarrow 5 I^- + IO_3^- + 3 H_2O$  réaction de dismutation du diiode ( $I_2$ )

Bilan de matière : la réaction est totale et on a au départ  $C_1V_1$  mol de  $I_2$ . On obtient donc

$$\boxed{n(IO_3^-)_{initial} = \frac{n(I_2)_{introduit}}{3} = \frac{C_1V_1}{3}}$$

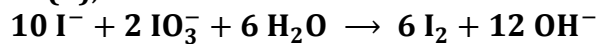
Opération 3 :



L'ion iodate est partiellement consommée par la **réaction (1)** supposé totale. Le bilan de matière donne si on suppose le glucose en défaut (sinon, on ne le dose pas) :

$$\boxed{n(IO_3^-)_{restant} = n(IO_3^-)_{initial} - \xi_3 = \frac{C_1V_1}{3} - \frac{n_{gluc}}{3}}$$

Opération 4 : D'après la **réaction (2)**,



la quantité de diiode formée vaut :

$$\boxed{n(I_2)_{formé} = 3 n(IO_3^-)_{restant} = C_1V_1 - n_{gluc}}$$

Par ailleurs en tenant compte de la dilution, à l'opération 3, on a introduit :  $n_{gluc} = \frac{C_0V_2}{10}$

Opération 6 :

Enfin, la **réaction (3)** correspond à la réaction de dosage. Or à l'équivalence d'un dosage, les réactifs ont été introduits dans les proportions stœchiométriques donc il n'en reste plus si la réaction est totale, et le bilan de matière donne :

$$n(I_2)_{formé} - \xi_6 = 0 \text{ et } n(S_2O_3^{2-})_{versé \text{ à équivalence}} - 2\xi_6 = 0 \rightarrow \boxed{n(I_2)_{formé} = \frac{C_3V_{eq}}{2}}$$

Finalement, on obtient en éliminant  $n(I_2)_{formé}$  :

$$\frac{C_3V_{eq}}{2} = C_1V_1 - \frac{C_0V_2}{10} \Leftrightarrow \boxed{C_0 = \frac{10}{V_2} \left( C_1V_1 - \frac{C_3V_{eq}}{2} \right)}$$

**Q13.** Pour que ce dosage soit valide, il faut que l'ion iodate soit effectivement en excès à la réaction (1) (voir Q9). Ainsi, il faut que :

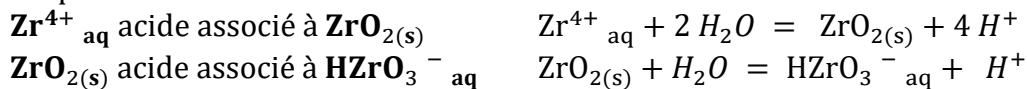
$$C_1V_1 > n_{gluc} \Leftrightarrow \boxed{C_1V_1 > \frac{C_0V_2}{10}}$$

**Problème 4. Extrait mines ponts 2025 psi.**

9. Les nombres d'oxydation de l'élément zirconium dans les différentes espèces :

	Zr(s)	ZrO <sub>2(s)</sub>	Zr <sup>4+</sup> <sub>aq</sub>	HZrO <sub>3</sub> <sup>-</sup> <sub>aq</sub>
n.o(Zr) dans	0	+IV	+IV	+IV

10. On classe selon les nombres d'oxydation et l'acido basicité et on trace un diagramme préliminaire :



+IV	Zr <sup>4+</sup> <sub>aq</sub>	ZrO <sub>2(s)</sub>	HZrO <sub>3</sub> <sup>-</sup> <sub>aq</sub>
0	Zr(s)		

Par identification :

A: Zr<sub>(s)</sub>    B: Zr<sub>4+</sub>    C: ZrO<sub>2(s)</sub>    (HZrO<sub>3</sub><sup>-</sup><sub>aq</sub> ne figure pas; on va justifier plus tard).

Les domaines A et C : domaines d'existence (espèces solides).

Le domaine B : Domaine de prédominance ( espèce soluble).

11. La frontière qui sépare A et B est déterminée par le couple redox : Zr<sup>4+</sup>/Zr(s) :

La demi-équation redox :  $\text{Zr}^{4+} + 4e^- \rightleftharpoons \text{Zr}_{(s)}$

Le potentiel de Nernst :  $E = E^o + \frac{0,06}{4} \log [\text{Zr}^{4+}]$       A la frontière :  $E_f = E^o + \frac{0,06}{4} \log C_o$

On trouve :  $C_o = 10^{-4} \text{ mol/L}$

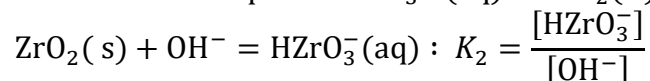
La droite de la frontière entre les domaines A et C a pour équation  $E = a + b \cdot \text{pH}$ .

12. Le couple C/A est le couple redox : ZrO<sub>3</sub><sup>-</sup><sub>aq</sub> /Zr(s) :

La demi-équation redox :  $\text{HZrO}_3^- + 5e^- + 5\text{H}^+ \rightleftharpoons \text{Zr}_{(s)} + 3\text{H}_2\text{O}$

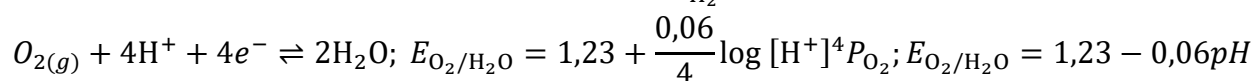
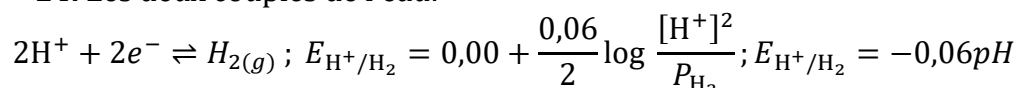
La pente :  $b = -0,06 \cdot \frac{\alpha(\text{H}^+)}{\alpha(e^-)} = -0,06 \text{ V/ unité de pH}$

13. La frontière verticale entre les espèces HZrO<sub>3</sub><sup>-</sup>(aq) et ZrO<sub>2</sub>(s) :



A la frontière :  $K_2 = \frac{C_o}{[\text{OH}^-]_f}$  on trouve  $\text{pH}_f = 15 (> 14)$  donc HZrO<sub>3</sub><sup>-</sup> ne figure pas.

14. Les deux couples de l'eau:



15. Le zirconium et l'eau sont disjoints dans le diagramme, donc il n'est pas stable dans l'eau. Il réagit avec l'eau si  $\text{pH} < 1,25$  pour donner Zr<sup>4+</sup> ou pour donner ZrO<sub>2</sub> si  $\text{pH} > 1,25$  suivant :

