I Rayons de convergence

Exercice 1 *[Solution]*
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes

$$\sum nx^{n^2} \quad ; \quad \sum \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2} x^n \quad ; \quad \sum \frac{(1+2i)^n-(2i)^n}{n(n+1)}x^n$$

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2017) *[Solution]*
Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2}x^{2n}$.

Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2018) *[Solution]*
Rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}z^n$?

Exercice 4 (Mines-Télécom PSI 2023) *[Solution]*

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière à coefficients complexes.
2. Soit (a_n) une suite bornée telle que $\sum a_n$ diverge. Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.
3. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum (\sqrt{n})^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$

Exercice 5 (CCP PSI 2022) *[Solution]*
On note $\displaystyle a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Prouver l'existence de a_n.
2. Montrer que $a_n \sim \dfrac{1}{n}$.
3. Déterminer le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

Exercice 6 (Règle de Cauchy) *[Solution]*
Soit (a_n) une suite complexe telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = l \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$?
indication : utiliser la définition de limite avec ε.

Exercice 7 (CCP PSI 2016) *[Solution]*

1. Soit $\displaystyle a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   indication : vérifier que $1+t^2 \geqslant 2t$.
2. Rayon de convergence et domaine de définition de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2023) *[Solution]*
Soit $\displaystyle a_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}(t^n)}$

1. Déterminer un équivalent de a_n.
   indication : poser $u = t^n$
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$. Y a-t-il convergence en $\pm R$?
3. Exprimer a_n à l'aide de la somme d'une série

Exercice 9 *[Solution]*

Soit (a_n) une suite complexe telle que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est 1. On pose $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\displaystyle T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} S_k$.

Montrer que les rayons de convergence de $\sum S_n z^n$ et $\sum T_n z^n$ valent 1.
indication : montrer que $1 = R_a \leqslant R_S \leqslant R_T$ et puis, exprimer S_n et fonction de T_n puis a_n en fonction de S_n.

Exercice 10 (Centrale PSI 2009) *[Solution]*
On suppose $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$; donner le rayon de convergence de $\sum a_n P(n) z^n$, où $P \in \mathbb{C}[X]$.

II Calculs de sommes

Exercice 11 **(CCP PSI 2014)** *[Solution]*
Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{3n}{n+2}x^n$.

Exercice 12 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*
Domaine de définition et somme de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2+4n-1}{n+2}x^n$.

Exercice 13 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*
Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}n^{(-1)^n}x^n$.

Exercice 14 **(Mines-Télécom PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $\theta\in\,]0,\pi[$ et $\displaystyle f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sin(k\theta)x^k$.

1. Montrer par l'absurde que $u_k=\sin(k\theta)$ ne converge pas vers 0.
2. Déterminer le rayon de convergence R de la série de définition de $f(x)$.
3. Calculer $f(x)$.

Exercice 15 *[Solution]*

Rayon de convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,\mathrm{d}t x^n$; $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}\cos\frac{2n\pi}{3}$; $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+1}}{(3n+1)!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}x^{E(\sqrt{n})}$?

Exercice 16 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ pour $x\in]-1-1[$.

1. Déterminer a,b,c tels que $f(x)=\dfrac{a}{1+x}+\dfrac{bx+c}{1-x+x^2}$ et déterminer une primitive de f.
2. Calculer $\displaystyle S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}$
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$

Exercice 17 **(Mines-Télécom PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $\displaystyle f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Calculer $f(x)$ pour $|x|<R$.
3. Calculer $f(R)$.

Exercice 18 **(ENSAM PSI 2007)** *[Solution]*
Calculer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n-1)(2n+1)}$. Exprimer la somme à l'aide de fonctions usuelles et étudier le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

Exercice 19 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*
Calculer le rayon de convergence et la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}a_nx^n$ avec $a_n=\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}$.

Exercice 20 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*
Domaine de définition et somme de $\displaystyle f(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(n+1)(2n+1)}$.

Exercice 21 **(Mines-Ponts PSI 2007)** *[Solution]*
Étude de $\displaystyle f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n t\,\mathrm{d}t\right)x^n$. (domaine de définition et l'exprimer avec des fonctions usuelles)
indication : calculer a_n+a_{n+2}.

Exercice 22 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

1. Définir le rayon de convergence d'une série entière puis déterminer celui de $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} u_n x^n$ avec $u_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Trouver a, b, c tels que $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{at+b}{1+t^2} + \frac{c}{1-tx}$.

3. Déterminer $S(x)$ pour $x \in]-R, R[$ puis la valeur de $S(-1)$.

Exercice 23 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2024)** *[Solution]*

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. Donner une autre expression de $f(x)$ pour tout x tel que $|x| < R$.

Exercice 24 **(Mines-Ponts PC 2015)** *[Solution]*

Rayon de convergence et somme de $\sum_{n \geqslant 0} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n$; (calculer $\int_0^1 t^n (1-t)^n\,\mathrm{d}t$).

Exercice 25 **(Mines-Ponts PSI 2011)** *[Solution]*

1. Donner le rayon de convergence R de $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$, où $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

2. Faire l'étude en $\pm R$ puis calculer la somme pour $|x| < R$ (remarquer que $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$).

Exercice 26 **(ENSEA PC 2007)** *[Solution]*

Rayon de convergence et calcul de $\sum \sin(n) x^n$.

Exercice 27 **(Mines-Ponts PSI 2024)** *[Solution]*

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

1. Déterminer la valeur de F_n en fonction de n

2. Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$

3. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ?

Exercice 28 **(CCP PC 2009)** *[Solution]*

1. Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

2. On pose $t_n = \mathrm{Tr}(A^n)$; exprimer t_{n+3} en fonction de t_{n+2}, t_{n+1} et t_n.

3. Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum t_n x^n$.

Exercice 29 **(Centrale PSI 2014)** *[Solution]*

1. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = 1$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}^+$.

2. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.
   indication : montrer que $x_n \in [0, 3/4]$ et utiliser la convergence normale de la série entière sur ce segment.

III Calculs de séries numériques

Exercice 30 **(CCP PSI 2016)** *[Solution]*

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2^{n+1}}$.

Exercice 31 *[Solution]*

Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 32 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*

1. Montrer, lorsque toutes les quantités existent que $\tan(2a) = \dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2 a}$

2. Montrer que $\pi = 8\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$

3. Montrer que $\left|\pi - 8\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}(\sqrt{2}-1)^{2k+1}\right| \leqslant \dfrac{8}{2n+3}$

Exercice 33 **(Mines-Ponts PSI 2023)** *[Solution]*

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)$

2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 34 *[Solution]*

Soient $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ et $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Montrer la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

indication : reconnaître $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *puis le DSE de* f^2 *sur* $[0,1[$ *et prendre la limite en* 1 *(on peut ?)*

Exercice 35 **(ENSAM PSI 2014)** *[Solution]*

1. Soit $a \in]0,\pi[$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(na)}{n} x^n$ converge pour $x \in]-1,1[$ et expliciter sa somme $f(x)$ (*dériver*).

2. Montrer que, pour $x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(na)}{n} x^n = \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) S_n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin(ka) x^k$.

3. En déduire la convergence et la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(na)}{n}$. *(*$(S_n)$ *est bornée indépendamment de* $x \in [0,1]$*)*

IV Calculs de sommes par equations différentielles

Exercice 36 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

On considère la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\, x^{2n+1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière.

2. On pose $\forall x \in\,]-R,R[\,,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n+1)}\, x^{2n+1}$.
   Donner une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients non constants vérifiée par f.

3. Rappeler l'expression de $\arcsin'$ puis résoudre l'équation différentielle. En déduire une expression simplifiée de la fonction f

Exercice 37 **(ENSAM PSI 2018)** *[Solution]*

1. Déterminer les x pour lesquels $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ converge.

2. On note S la somme de cette série. Montrer que S est solution de $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ en fonction de S et déterminer S.

Exercice 38 **(Mines-Télécom PSI 2018)** *[Solution]*

1. Donner les variations de la suite définie par $w_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $\lim w_n$ et montrer que $w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} w_n$.

3. Déterminer le rayon de convergence et la somme S de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} w_n x^n$. Calculer $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n w_n x^n$.

Exercice 39 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $a_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n \mathrm{d}t$.

1. Montrer que (a_n) converge et déterminer sa limite.

2. Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge.

3. On note R le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ et f sa somme.

a) Montrer que $a_n \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$ et déterminer R.

b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle et résoudre cette équation.

Exercice 40 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $(\mathcal{E}) : x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0$ et f une solution de $(\mathcal{E})$ DSE sur $]-r,r[$ telle que $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ si $|x| < r$.

1. Justifier que f est $\mathcal{C}^2$ sur $]-r,r[$ et écrire f' et f'' sous forme de séries entières.

2. Montrer qu'il existe $(b_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} b_n(a_n - a_{n-1})x^n$.

3. Déterminer a_0 et une relation entre a_n et a_{n-1}.

4. En déduire une expression simple de f.

V DSE sans équations différentielles

Exercice 41 **(Mines-Télécom PSI 2021)** *[Solution]*
Développer en série entière la fonction f définie par : $f\,(s) = \dfrac{s}{2-s^2}$.

Exercice 42 *[Solution]*
Développer en série entière les fonctions $f_1(x) = \arctan\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ et $f_2(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

Exercice 43 **(Mines-Ponts PSI 2017)** *[Solution]*

1. Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln|1-t|}{t}\,\mathrm{d}t$

2. f est-elle DSE au voisinage de 0 ? Quel est le rayon de convergence ?

3. Calculer $f(1)$ et étudier la dérivabilité de f en 1.

Exercice 44 **(ENSEA-EIVP PC 2014)** *[Solution]*
DSE de $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 45 **(Mines-Télécom série 2 PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$

2. Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles

3. Déterminer le développement en série entière de F.

4. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$

Exercice 46 **(Mines-Ponts MP 2011)** *[Solution]*
DSE de $f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 6\right)$ et rayon de convergence ?

Exercice 47 **(CCP MP 2015)** *[Solution]*
DSE de $f(x) = \ln(1 - x - 2x^2)$ et $g(x) = \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 48 **(Centrale PC 2011)** *[Solution]*
Donner le DSE de $f(x) = \ln\left(1 + x + x^2\right)$.

Exercice 49 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*
Développer $f(x) = \dfrac{x\,\mathrm{sh}(\alpha)}{x^2 - 2x\,\mathrm{ch}(\alpha) + 1}$ en série entière.

Exercice 50 **(CCP PSI 2010)** *[Solution]*

1. Montrer que f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $\dfrac{1}{f}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 51 **(CCP PSI 2012)** *[Solution]*
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = \dfrac{1}{2}$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et expliciter la valeur de sa dérivée d'ordre n en 0.

Exercice 52 **(Mines-Ponts PSI 2011)** *[Solution]*
Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin(x)}$. En écrivant $f(x)g(x) = 1$ avec $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$, montrer que f est DSE et que son rayon de convergence R vérifie $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant R \leqslant \pi$.

Exercice 53 **(EIVP PSI 2016)** *[Solution]*

1. Déterminer le DSE de $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire celui de $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^{-k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$.

VI DSE par équation différentielle

Exercice 54 *[Solution]*
Soit $f(x) = \dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $x \in]0,1[$. Déterminer a_n et le rayon de convergence R. *(indication : éq diff)*

2. Étudier la nature de $\sum(-1)^n a_n R^n$ et $\sum a_n R^n$.

Exercice 55 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Sur quel domaine f est-elle $\mathcal{C}^1$? Calculer $f'(x)$ et trouver a, b et c polynômiales telles que $a(x)f'(x)+b(x)f(x) = c(x)$.

2. f est-elle DSE ?

3. Déterminer les coefficients du DSE de f.
indication : on peut remarquer que f est impaire (pour simplifier les calculs)

Exercice 56 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f(x) = (\arcsin x)^2$.

1. Montrer que f est DSE sur $]-1,1[$

2. Montrer que f' est solution sur $]-1,1[$ de $(1-x^2)y' - xy = 1$

3. Déterminer les coefficients du DSE de f
indication : pour simplifier les calculs, remarquer que f' est impaire

Exercice 57 **(Centrale PSI 2011)** *[Solution]*
Montrer que $f : x \mapsto \sin\left(\dfrac{\arcsin(x)}{3}\right)$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et déterminer le DSE de f.

Exercice 58 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} x^n$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière

2. Montrer que $f'(x) - f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$

3. En déduire une autre expression de f

4. Montrer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} = e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!}$

Exercice 59 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Soient $\lambda \in]-1, 1[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = \alpha f(x) + f(\lambda x)$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les solutions DSE de cette équation.

3. Montrer que f est DSE.
indication : montrer que pour $x \in \mathbb{R}$, il existe C (dépendant de x) telle que $|t| \leqslant |x| \Rightarrow |f^{(p)}(t)| \leqslant C(1 + |\alpha|)^p$.

Exercice 60 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ et $S_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(\gamma x) \text{ et } f(0) = \alpha\}$

1. Déterminer S_α pour $\gamma = 1$ puis $\gamma = -1$.

2. Soit $f(x) = \alpha \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \gamma^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{n!}$. Vérifier que le rayon de convergence de cette série entière est $+\infty$ et montrer que $f \in S_\alpha$

3. Déterminer S_α
indication : montrer que si $f \in S_\alpha$ alors f est DSE en trouvant la valeur de $f^{(n)}$ en fonction de f

Exercice 61 **(Mines-Télécom PSI 2016)** *[Solution]*
Déterminer les séries entières solutions de $x^2y'' + 6xy' + (6 - x^2)y = -1$ et déterminer leurs sommes.

VII Études de fonctions DSE

Exercice 62 **(CCINP PSI 2019)** *[Solution]*
Soit $I = [0, 1]$

1. Montrer que $\forall x \in I, \ln(1 + x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{n+1}}{2n+2} \right)$ converge simplement sur I.

3. Déterminer sa somme S.

4. Y a-t-il convergence uniforme sur I ?

Exercice 63 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soient $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} \,\mathrm{d}t$ et $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$. On rappelle que $S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer le domaine de définition de F.

2. Montrer que si $x \in]-1, 1[$ alors $F(x) = -S(x)$

3. Montrer que si $x \in]0, 1[$, $F(x) + F(1 - x) = \ln(x)\ln(1 - x) - \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice 64 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$

1. Donner le domaine de définition D de f

2. Montrer que f est dérivable sur D

3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1 ; on pourra faire une comparaison série/intégrale et utiliser $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice 65 **(ENTPE-EIVP MP 2009)** *[Solution]*

1. Domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)x^n$?

2. Montrer qu'au voisinage de 1, on a $f(x) \sim \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$. (on pourra étudier $g(x) = (1-x)f(x)$.)

Exercice 66 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

Soient $f(x) = \sum_{n \geqslant 2} \ln(n) x^n$ et $g(x) = \sum_{n \geqslant 2} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) x^n$

1. Déterminer les rayons des convergence de f et g.

2. Montrer que g est continue sur $[-1, 1[$

3. Déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$

4. Montrer que f peut se prolonger par continuité à $[-1, 1[$

5. Déterminer des équivalents de f et g en 1^-

Exercice 67 **(Mines-Télécom PSI 2022)** *[Solution]*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de complexes et R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

1. Rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} a_n (\ln n) z^n$ et $\sum_{n \geqslant 1} a_n \left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) z^n$?

2. On pose $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln n$. Montrer que la suite (γ_n) converge.

3. Montrer que : $\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n \sim -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$ quand $x \to 1^-$. On pensera à un produit de Cauchy de séries entières.

Exercice 68 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*

Soit $I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n \,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de I_n et préciser son signe

2. Étudier les variations de (I_n), puis sa convergence et sa limite

3. Par IPP, montrer que $(n+1)I_n + I_{n-1} = e^{-1}$ et en déduire $I_n \sim \dfrac{e^{-1}}{n}$.

4. On pose $g(x) = \sum_{n \geqslant 0} I_n x^n$. Déterminer le domaine de définition de g

5. Écrire $g(x)$ sous forme d'une intégrale pour $|x| < 1$

6. Déterminer un équivalent de $g(x)$ quand x tend vers 1^-.

indication : considérer $\sum \left(I_n - \dfrac{e^{-1}}{n}\right) x^n$ *et sa limite quand* x *tend vers 1.*

Exercice 69 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $\sum a_n$ soit absolument convergente. On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $A = \lim_{n \to +\infty} A_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \,\mathrm{d}t$, puis calculer sa valeur.

2. Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{n!} t^n$ et $\sum \dfrac{A_n}{n!} t^n$ ont un rayon de convergence infini.

3. On pose pour tout réel t, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{a_n}{n!} t^n$ et $g(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{A_n}{n!} t^n$.

a) Montrer que f et g sont dérivables et vérifient $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = g'(t) - g(t)$

b) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \int_0^t f(u) e^{-u} \,\mathrm{d}u = e^{-t}(g(t) - f(t))$.

4. Montrer que $\int_0^t f(u) e^{-u} \,\mathrm{d}u \xrightarrow[t \to +\infty]{} A$.

Exercice 70 **(Centrale PSI 2021)** *[Solution]*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \int_n^{+\infty} \dfrac{\mathrm{th}(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t$

1. Justifier l'existence de a_n. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant 1} a_n x^n$ et le domaine de définition de sa somme S.

2. S est-elle continue en -1.

3. Déterminer un équivalent de S en 1.
indication : commencer par chercher un équivalent de a_n

Exercice 71 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*
Soient $\alpha > 0$ et $(\mathcal{E}) : xy' + \alpha y - xy^2 = \alpha$

1. Montrer que $(\mathcal{E})$ admet une unique solution φ développable en série entière sur $]-1,1[$

2. Montrer que $\varphi(x) \underset{1}{=} O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

3. Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(1) = 0$.

a) Montrer la convergence de $\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \left[f'(t) + \varphi(t)f(t)\right]^2 \,\mathrm{d}t$

b) En déduire $\alpha \displaystyle\int_0^1 t^{\alpha-1} f(t)^2 \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^\alpha f'(t)^2 \,\mathrm{d}t$

Exercice 72 **(ENSAM PSI 2009)** *[Solution]*
Soient deux séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence infinis, avec $b_0 \geqslant 0$ et $b_n > 0$ pour $n \geqslant 1$. On note f et g les sommes de ces séries.

1. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{=} o(b_n)$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$.
indication : si $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que $n \geqslant n_0 \Rightarrow 0 \leqslant a_n \leqslant \varepsilon b_n$ et remarquer que, pour $x > 0$, $g(x) \geqslant b_n x^n$.

2. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$. *(indication : $a_n \sim b_n$ ssi $a_n - b_n = o(b_n)$)*

3. Montrer que le RCV de $\displaystyle\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} \frac{x^n}{n!}$ est $+\infty$ et déterminer un équivalent de sa somme en $+\infty$.

VIII Permutations somme/intégrale

Exercice 73 **(CCP PSI 2011)** *[Solution]*
Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\operatorname{th} x)\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ après avoir justifié la convergence.

Exercice 74 **(CCP PSI 2009)** *[Solution]*

1. Calculer $I_k = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x} \,\mathrm{d}x$ pour $k \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que $\forall x > 0, e^{-x} \cos\sqrt{x} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-x}(-1)^k \frac{x^k}{(2k)!}$.

3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ sous forme d'une somme de série.

Exercice 75 **(Mines-Ponts PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + x}}$

1. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$

3. Rappeler le DSE de $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}}$ et en déduire une expression de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sous la forme de la somme d'une série.

Exercice 76 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*

1. Convergence et calcul éventuel de $I_{k,n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt}\,\mathrm{d}t$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n$.

3. Justifier que si $x \in]-R,R[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 77 **(Mines-Ponts PSI 2019)** *[Solution]*

1. Justifier l'existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(xt)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ pour $x \in \mathbb{R}$.

2. Justifier que F est DSE.

Exercice 78 **(Centrale PSI 2021)** *[Solution]*

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$

2. Déterminer les fonctions f DSE paires solutions de $x(x^2-1)y'' + 3x^2y' + xy = 0$

3. Comparer f et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x^2\sin^2 t}$

Exercice 79 **(Centrale PSI 2019)** *[Solution]*

1. Déterminer le domaine de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.

3. Montrer que f est DSE et donner le rayon de convergence.

Exercice 80 **(CCP PSI 2018)** *[Solution]*

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^n$ telle que $\sum a_n$ est absolument convergente. On pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!}x^n$.

1. Quel est le rayon de convergence de la série entière ?

2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$ existe, pour $n \in \mathbb{N}$, et la calculer.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 81 **(CCP PSI 2017)** *[Solution]*

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\cos t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est-elle développable en séries entières.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $xf''(x) + f'(x) + xf(x)$.

Exercice 82 **(Centrale PSI 2022)** *[Solution]*

Soient $\lambda > -\dfrac{1}{2}$, $\varphi_\lambda(t) = \left(1-t^2\right)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ et $I_\lambda(x) = \displaystyle\int_0^1 \varphi_\lambda(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$

1. φ_λ est-elle intégrable sur $[0,1[$?

2. Montrer que I_λ est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ puis exprimer I''_λ en fonction de $I_{\lambda+1}$ et $I_{\lambda+2}$

3. Montrer que I_λ est développable en série entière.

Exercice 83 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*

1. Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1 - x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $]-\infty, 1[$.

2. Montrer que f est DSE.

Exercice 84 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*

1. Si le rayon de convergence de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ est $R > 0$ et si $\sum |a_n|R^n$ converge, montrer que $f \in \mathcal{C}^0([-R,R])$.

2. Soit $f(t) = \dfrac{1}{t}\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right|$. Exprimer $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ à l'aide de la somme d'une série.

3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et la calculer, en admettant $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

IX Séries génératrices

Exercice 85 **(ENSAM PSI 2009)** *[Solution]*
On donne $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| \leqslant 2^{n+1} - 1$.
2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n$?
3. Calculer S et en déduire la valeur de u_n.

Exercice 86 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + n$ pour $n \geqslant 0$.

1. Trouver deux réels a et b tels que $u_{n+1} + a(n+1) + b = 2(u_n + an + b)$
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Déterminer le rayon R de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ et calculer sa somme.
4. Étudier la convergence de la série pour $x = R$ et $x = -R$.
5. Retrouver l'expression de la somme de la série entière à partir de la relation initiale définissant (u_n).

Exercice 87 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_0 = -4$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ et $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $|a_n| \leqslant 2^{n+2}$
2. Soit $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série entière est > 0 puis que $S(x) = \dfrac{6x^2 + 6x - 4}{(x+1)(x-1)^2}$ pour $|x| < R$.
3. Trouver a, b, c tels que $S(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x-1} + \dfrac{c}{(x-1)^2}$
4. Déterminer a_n en fonction de n.

Exercice 88 **(Navale PSI 2022)** *[Solution]*
Soit (a_n) définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1} a_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$.
2. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$? On note $f(x)$ la somme.
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par f et en déduire $f(x)$.

Exercice 89 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$

1. Montrer que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Étudier la monotonie de (a_n) et en déduire que $\sum(a_{n+2} - a_{n+1})$ diverge
3. On pose $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
4. Montrer que S est solution de $(x-1)y' + (x+1)y = 0$
5. Déterminer la valeur de $S(x)$ puis de a_n

Exercice 90 **(CCP PC 2015)** *[Solution]*
Soit $d_0 = 1$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$ et $d_n = \det(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ avec $a_{i,j} = \begin{cases} 1 - (n-i+2)^{-1} & \text{si } i = j \\ a_{i,i+1} = a_{i+1,i}^{-1} = (n-i+2)^{-1/2} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Calculer d_2 et montrer que $(n+1)d_n = nd_{n-1} + d_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
2. Montrer que $|d_n| \leqslant 1$; qu'en déduire sur le rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n\geqslant 0} d_n x^{n+1}$?
3. Trouver une équation différentielle vérifiée par S. En déduire $S(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{1-x}$ puis d_n.

Exercice 91 **(CCINP PSI 2024)** *[Solution]*
On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + (n+1)a_n$.

1. Montrer que $\dfrac{a_n}{n!} \leqslant 1$

2. Déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!}x^n$.

3. Résoudre cette équation en en déduire la valeur de a_{2p} et a_{2p+1}

Exercice 92 **(CCINP PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1+a_n}{n+1}$

1. Prouver que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$?

2. Trouver une équation différentielle vérifiée par la somme S de cette série entière sur $]-r, r[$, où $r = \min(1, R)$

3. Donner les solutions de cette équation différentielle en fonction de $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{1-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 93 **(CCINP PSI 2022)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 3$ et $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$ pour $n \geqslant 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant \dfrac{a_n}{n!} \leqslant 4^{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{n!}x^n$?

3. Montrer que la somme f de la série entière précédente vérifie $f'(x) = f(x)^2$.

4. En déduire la valeur de a_n.
indication : déterminer f en se plaçant sur un intervalle $]-h, h[$ où f ne s'annule pas.

Exercice 94 **(ENS PSI 2018)** *[Solution]*
Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{n-k+2}$. On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence de f est $\geqslant 1$.

2. Trouver (b_n) telle que, pour $|x| < 1$, $f'(x) = f(x)\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$ puis trouver f.

Exercice 95 **(Mines-Ponts PC 2014)** *[Solution]*
On note $a_n = \mathrm{Card}\{(p,q) \in \mathbb{N}^2, 3p + 2q = n\}$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$.

2. Déterminer f puis a_n.
indication : partir des DSE de $(1-x^2)^{-1}$ et $(1-x^3)^{-1}$.

Exercice 96 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*

1. Si R est le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$, quel est le mode de convergence de la série sur $]-R, R[$?

2. On note p_n le nombre partitions de $[\![1, n]\!]$ (nombre de façons d'obtenir $[\![1, n]\!]$ comme réunion d'ensembles non vides 2 à 2 disjoints). Montrer que $p_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k$, avec $p_0 = 1$.
indication : compter les partitions de $[\![1, n+1]\!]$ en fonction du nombre d'éléments présent dans l'ensemble qui contient $n+1$.

3. Déterminer $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{p_n}{n!}x^n$.

Exercice 97 **(Mines-Ponts PSI 2016)** *[Solution]*
On note d_n le nombre de permutations sans point fixe de $[\![1, n]\!]$.

1. Montrer que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$ avec $d_0 = 1$.
indication : dénombrer les permutations de $[\![1, n]\!]$ en fonction de leur nombre de points fixes.

2. Déterminer $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{d_n}{n!}x^n$ en considérant $e^x f(x)$ puis déterminer d_n.
indication : d_n s'exprime à l'aide d'un produit de Cauchy.

Exercice 98 **(Mines-Ponts PSI 2022)** *[Solution]*
Soit E un ensemble et $I(E)=\{g : E\to E, g\circ g = id_E\}$

1. On pose $t_0=1$ et $t_n=\text{Card}(I(\llbracket 1,n\rrbracket))$. Calculer t_1, t_2 et t_3

2. Montrer que le rayon de convergence de $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{t_n}{n!}x^n$ est $\geqslant 1$.

3. Montrer que $t_{n+2}=t_{n+1}+(n+1)t_n$
indication : distinguer si $g(n+2)=n+2$ où $g(n+2)\in\llbracket 1,n+1\rrbracket$

4. Déterminer $f(x)$

X Exercices théoriques

Exercice 99 **(Centrale PSI 2015)** *[Solution]*
Soit (a_n) une suite réelle telle que (na_n) tende vers 0 et $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$.

1. Montrer que $R\geqslant 1$ et $f(x)\underset{x\to 1}{=}o(\ln(1-x))$.
indication : pour $\varepsilon>0$, couper la somme en N de sorte que $|a_n|\leqslant\varepsilon/n$ si $n\geqslant N$.

2. Réciproquement, si $f(x)\underset{x\to 1}{=}o(\ln(1-x))$, a-t-on (na_n) tend vers 0 ?
indication : non ; avec $a_n=\dfrac{1}{n}$ s'il existe p tel que $n=2^p$ et 0 sinon par exemple.

Exercice 100 **(Centrale PSI 2023)** *[Solution]*
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum a_n z^n$ soit de rayon infini. On note f sa somme.

1. Soit $r>0$ et $p\in\mathbb{N}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t=2\pi a_p r^p$.

2. On suppose f bornée sur $\mathbb{C}$.

a) Montrer qu'il existe $M\geqslant 0$ tel que $\forall p\in\mathbb{N},\ |a_p|\leqslant\dfrac{M}{r^p}$.

b) Montrer que $a_p=0$ pour tout $p\in\mathbb{N}^*$. En déduire que f est constante.

3. On suppose maintenant qu'il existe $q\in\mathbb{N}^*$ et $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}^{*+})^2$ tels que $\forall z\in\mathbb{C},\ |f(z)|\leqslant\alpha|z|^q+\beta$. Montrer que f est une fonction polynôme.

Exercice 101 **(Mines-Ponts PSI 2015)** *[Solution]*
Soit $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}a_n x^n$ une série entière de rayon 1 telle que $S=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$ converge.

1. Montrer que pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=S-\sum_{n=0}^{+\infty}R_n\left(x^n-x^{n+1}\right)$, où $R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a_k$.

2. En déduire que $\lim_{x\to 1^-}f(x)=S$ et conclure que f est continue sur $[0,1]$.
indication : couper la somme avec les restes à un rang n_0 à partir duquel $|R_n|<\varepsilon$, avant de faire tendre x vers 1.

Exercice 102 **(Série de Taylor divergente)** *[Solution]*
Montrer que $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{\exp\left(in^2x\right)}{2^n}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ dont la série de Taylor possède un rayon de convergence nul.

Exercice 103 **(CCINP PSI 2021)** *[Solution]*
Soit $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(xt^2)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer $F^{(n)}(0)$. F est-elle DSE ?
indication : vérifier que le RCV de la série de Taylor est nul.

Solutions

Exercice 1 *[sujet]* **1.** (nr^{n^2}) est bornée si et seulement si $r \in [0,1[$ donc $R = 1$.

2. $a_{2n} = \exp(2n + O(1))$ donc $(a_{2n}r^{2n})$ est bornée si et seulement si $r \in [0, e^{-n}]$; $a_{2n+1} = \exp(-2n + O(1))$ donc $(a_{2n+1}r^{2n+1})$ est bornée si et seulement si $r \in [0, e]$. La suite $(a_n r^n)$ est donc bornée si et seulement si $r \in [0, e^{-1}]$ donc $R = e^{-1}$.

3. $|1 + 2i| = \sqrt{5}$ et $|2i| = 2 < \sqrt{5}$ donc par somme (et invariance du rayon par intégration terme à terme), $R = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice 2 *[sujet]* $R = \dfrac{1}{2}$ par d'Alembert

Exercice 3 *[sujet]* e par D'Alembert

Exercice 4 *[sujet]* **1.** cours !

2. (a_n) bornée donc $R \geqslant 1$ et $\sum a_n$ DV donc $R \leqslant 1$

3. $|a_n| \leqslant 1$ (par concavité de ln) donc $R \geqslant 1$ et $\lim a_{2n} = 1$ (DL) donc $\sum a_n$ DV et $R = 1$

Exercice 5 *[sujet]* **1.** $\sum \dfrac{1}{1+k^2}$ CV

2. $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ donc $a_n \sim \dfrac{\pi}{2} - \arctan(n) = \arctan\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$

3. $R = 1$ par équivalent, $\sum a_n$ DV et $\sum an(-1)^n$ CV par CSSA ((a_n) est bien décroissante et tend vers 0) donc $D = [-1, 1[$

Exercice 6 *[sujet]* Si $l \in \mathbb{R}^{+*}$, on a pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geqslant n_0$, $(l - \varepsilon)^n \leqslant |a_n| \leqslant (1 + \varepsilon)^n$ donc $\dfrac{1}{l+\varepsilon} \leqslant R \leqslant \dfrac{1}{l-\varepsilon}$, ceci pour tout $\varepsilon > 0$ donc $R = \dfrac{1}{l}$.
Si $l = 0$, on trouve de même $R \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$ donc $R = +\infty$ et si $l = +\infty$, on a $R \leqslant \dfrac{1}{l}$ pour tout $l > 0$ donc $R = 0$.

Exercice 7 *[sujet]* On a $t^n \leqslant \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n \leqslant 1$ si $t \in [0,1]$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $R = 1$. La série CV si $x \in [-1, 1[$: si $x = -1$, la série vérifie le CSSA car (a_n) tend vers 0 par TCD avec $\left|\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leqslant 1$.

Exercice 8 *[sujet]* **1.** $a_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{u^{1/n}}{u \operatorname{ch} u} \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{du}{u \operatorname{ch} u}$ par TCD avec $\left|\dfrac{u^{1/n}}{u \operatorname{ch} u}\right| \leqslant \dfrac{1}{\operatorname{ch} u} \underset{u \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$

2. $a_n \sim \dfrac{I}{n}$ avec $I > 0$ donc $R = 1$ et $\sum a_n$ DV (SATP) ; par CSSA, $\sum (-1)^n a_n$ CV

3. $\dfrac{1}{\operatorname{ch}(t^n)} = \dfrac{2e^{-t^n}}{1 - e^{-2t^n}} = 2\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t^n}$ donc (TITT) $a_n = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t^n}$ dt car $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|e^{-(2k+1)t^n}\right| dt \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\, dt = \frac{1}{2k+1}e^{-(2k+1)}$

Exercice 9 *[sujet]* (S_n) est le produit de Cauchy de (a_n) et (1) donc $R_S \geqslant R_a$; de même, $((n+1)T_n)$ est le produit de Cauchy de (S_n) et (1), puis par invariance par dérivation, $R_T \geqslant 1$.
$a_n = S_n - S_{n-1}$ donc par comme $R_a \geqslant R_S$ et $S_n = (n+1)T_n - nT_{n-1}$ donc $R_S \geqslant R_T$.

Exercice 10 *[sujet]* Si $b_n = P(n)$ alors $a_n = O(|b_n|)$ donc $R_b \leqslant R_a$ et si $0 \leqslant \rho < R_a$, il existe r tel que $\rho < r < R_a$, $(a_n r^n)$ est donc bornée puis $b_n \rho^n = (a_n r^n) \times P(n) \left(\dfrac{\rho}{r}\right)^n$ tend vers 0 donc est bornée ; on en déduit $\rho \leqslant R_b$ puis $R_a = R_b$ (ce qui est aussi valable si $R_a = +\infty$.

Exercice 11 *[sujet]* $R = 1$ par d'Alembert et, pour $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(3 - \frac{6}{n+2}\right) x^n = 3\frac{x}{1-x} - \frac{6}{x^2}\left(-\ln(1-x) - x - x^2\right)$.

Exercice 12 *[sujet]* $R = 1$ puis $D =]-1, 1[$ (DVG en ± 1) $S(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \left(n + 2 - \frac{5}{n+2}\right) x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} + \frac{5}{x^2}(\ln(1-x) + x)$

Exercice 13 *[sujet]* On a $\frac{1}{n} \leqslant n^{(-1)^n} \leqslant n$ donc $R = 1$; si $|x| < 1$, $\sum_{n=0}^{2N} n^{(-1)^n} x_n = \sum_{n=0}^{N} 2nx^{2n} + \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} = 2\sum_{n=0}^{N} n(x^2)^n + \sum_{n=1}^{2N} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{x^{2n}}{2n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^2)^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{x} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^n}{n} = \frac{2x^2}{1-x^2} - \ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

Exercice 14 *[sujet]* **1.** si $a_k = \sin(k\theta)$ tend vers 0 alors $\lim_{k\to+\infty} \cos^2(k\theta) = 1$ puis $a_{k+1} = a_k \cos\theta + \sin\theta\cos(k\theta)$ ne tendrait pas vers 0 car $\sin\theta \neq 0$

2. (a_n) est bornée donc $R \geqslant 1$ et $\sum a_n$ DV donc $R \leqslant 1$

3. si $|x| < 1$ alors $\left|xe^{i\theta}\right| < 1$ donc $f(x) = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(xe^{i\theta}\right)^k\right) = \operatorname{Im} \frac{1}{1-xe^{i\theta}} = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}$

Exercice 15 *[sujet]* **1.** Si $f_n(t) = x^n \sin^n t$ alors $\|f_n\|_{\infty,[0,\pi/2]} = |x|^n$ donc CN si $|x| < 1$ et on a $R \geqslant 1$ et pour $|x| < 1$, $S_1(x) = \int_0^{\pi/2} \sum_{n\geqslant 0} (x\sin(t))^n \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-x\sin(t)} \overset{u=\tan(t/2)}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}u}{1-2xu+u^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{u-x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ donc on a bien $R = 1$ car S_1 n'est pas bornée en 1.

2. On a $R = 1$ (car $\left(\cos\frac{2n\pi}{3}\rho^n\right)$ est bornée si et seulement si $|\rho| \leqslant 1$) et pour $|x| < 1$, $S_2'(x) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n\geqslant 1} e^{2in\pi/3} x^{n-1}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{e^{2i\pi/3}}{1-xe^{2i\pi/3}}\right) = \frac{-1/2-x}{1+x+x^2}$; on en déduit $S_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x+x^2)$ car $S_2(0) = 0$

3. $R = +\infty$ puis $S_3(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + j^2e^{jx} + je^{j^2x}\right)$

4. La série CV pour $|x| < 1$ et DV pour $x = 1$ donc $R = 1$ $\sum_{n=0}^{N^2-1} = \sum_{n=0}^{N-1}\left(\sum_{k=n^2}^{n^2+2n} x^n\right) = \sum_{n=0}^{N-1}(2n+1)x^n$ donc $S_4(x) = 2x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.

Exercice 16 *[sujet]* **1.** $f(x) = \frac{1}{3(1+x)} + \frac{-x+2}{3(1-x+x^2)}$ puis $F(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C$

2. $R = 1$ puis, si $|x| < 1$, $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{3n} = f(x)$ donc $S(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ car $S(0) = 0$

3. S est continue en 1 par CSSA et $\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{3n+4}$

Exercice 17 *[sujet]* **1.** $R = 1$

2. $f'(x) = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{4n} = \frac{1}{1+x^4}$ et $f(0) = 0$ donc $f(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$

3. On prouve la continuité sur $[0,1]$: par CSSA, $|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{4n+5}$ donc CVU sur $[0,1]$ et $f(1) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}$.

Exercice 18 *[sujet]* La série CN sur $[-1,1]$ (donc f est continue sur $[-1,1]$) et DVG si $|x| > 1$ donc $R = 1$. Pour $|x| < 1$, $f(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n-1} - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(-x^2\arctan(x) - (\arctan(x) - x\right)$

Exercice 19 *[sujet]* $a_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ donc $R = 1$ et pour $|x| < 1$, $f(x) = 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n} - 2\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n+1} = -2\ln(1-x) - \frac{2}{x}(-\ln(1-x) - x)$

Exercice 20 *[sujet]* $D_f = [-1,1]$ (donc $R=1$) et si $|x|<1$, $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n+1} - 4\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{2n+1} = -\ln(1-x) + \frac{1}{x}(-\ln(1-x)-x) - 4g(x)$. Puis si $x>0$, $g(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\sqrt{x})^n}{n} - \sum_{n\geqslant 1}\frac{(\sqrt{x})^{2n}}{2n} - \sqrt{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(-\ln(1-\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \sqrt{x}\right)$. Pour $x<0$, on a $g(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n\sqrt{-x}^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}}\left(\arctan\sqrt{-x} - \sqrt{-x}\right)$

Exercice 21 *[sujet]* $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ et (a_n) décroît donc $\frac{1}{n+1} \leqslant 2a_n \leqslant \frac{1}{n-1}$ et $R=1$. Si $|x|<1$ alors $f(x) = a_0 + a_1x + x^2\sum_{n\geqslant 0} a_{n+2}x^n = a_0 + a_1x + x^2\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{n+1} - a_n\right)x^n = a_0 + a_1 x + \left(-x\ln(1-x) - x^2 - x^2 f(x)\right)$ puis $a_0 = \frac{\pi}{4}$ et $a_1 = -\frac{1}{2}\ln(2)$.

Exercice 22 *[sujet]* **1.** $\frac{t^n}{2} \leqslant \frac{t^n}{1+t^2} \leqslant t^n$ donc $\frac{1}{2(n+1)} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ et $R=1$.

2. $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{xt+1}{1+t^2} + \frac{x^2}{1-tx}\right)$

3. si $u_n(t) = \frac{t^n x^n}{1+t^2}$ avec $|x|<1$ alors $|u_n(t)| \leqslant |x|^n$ donc CVN sur $[0,1]$ et $S(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(tx)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1-tx)}\,\mathrm{d}t$ puis $S(x) = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{x\ln 2}{2} + \frac{\pi}{4} + x\ln(1-x)\right)$. $S(-t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n t^n$ vérifie le CSSA sur $[0,1]$ donc $|R_n(t)| \leqslant |u_{n+1}| \leqslant \frac{1}{n+2}$ donc CVU sur $[0,1]$. On en déduit $S(-1) = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \frac{\pi - 6\ln 2}{4}$.

Exercice 23 *[sujet]* **1.** si $t\in[0,1]$, $2 \leqslant 2+t^2 \leqslant 3$ donc $\frac{1}{3(n+1)} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{2(n+1)}$ et $R=1$.

2. On pose $f_n(t) = \frac{t^n x^n}{2+t^2}$, pour $|x|<1$ et on vérifie la CVN sur $[0,1]$ car $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{|x|^n}{2}$ donc $f(x) = \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(2+t^2)(1-xt)} = \frac{x}{2(1+2x^2)}\ln\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}(1+2x^2)}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{x\ln(1-x)}{1+2x^2}$

Exercice 24 *[sujet]* $R=4$ par d'Alembert. Par IPP successives $\int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$; pour $|x|<4$, on pose $f_n(t) = x^n t^n(1-t)^n$; $\|f_n\|_\infty = \left(\frac{|x|}{4}\right)^n$ donc CN sur $[0,1]$ et $S(x) = \int_0^1 \sum_{n\geqslant 0} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-xt)(1-t)} = \dots$

Exercice 25 *[sujet]* **1.** Par CSSA, on a $|a_n| \leqslant \frac{1}{n}$ donc $R \geqslant 1$ et $0 \leqslant (-1)^{n-1}a_n = \frac{1}{n} - (-1)^n a_{n+1}$ donc $|a_{n+1}| \geqslant \frac{1}{n}$ et $R=1$.

2. Si $S_N(t) = \sum_{k=n}^{N}(-1)^{k-1}t^{k-1}$ alors avec $|S_N(t)| le \frac{2}{1+t}$, le TCD donne $a_n = (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$; on en déduit $\sum a_n$ CV par CSSA et $\sum(-1)^n a_n$ DV par $(-1)^{n+1}a_n \geqslant \frac{1}{2n}$. Pour $|x|<1$, on a $f(x) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}x^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$ par CN ($\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{|x|^n}{2}$ si $u_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}t^{n-1}x^n}{1+t}$) donc $f(x) = \int_0^1 \frac{x}{(1+t)(1+xt)}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{1-x}\int_0^1\left(\frac{1}{1+t} - \frac{x}{1+xt}\right)\mathrm{d}t = \frac{x}{1-x}\ln\frac{2}{1+x}$

Exercice 26 *[sujet]* $(\sin(n)\rho^n)$ est bornée si et seulement si $\rho\in[0,1]$ donc $R=1$ et pour $|x|<1$, $S(x) = \mathrm{Im}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(xe^i)^n\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-xe^i}\right) = \frac{x\sin(1)}{2(1-x\cos(1))}$

Exercice 27 *[sujet]* **1.** $F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

2. $S(x) = \dfrac{1}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x} - \dfrac{1}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x}$ pour $|x| < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

3. $R = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ par somme (avec $R_1 \neq R_2$)

Exercice 28 *[sujet]* **1.** $\mathcal{X}_A = (X-2)(X-1+i)(X-1-i)$ donc A n'est pas DZ sur $\mathbb{R}$, mais DZ sur $\mathbb{C}$.

2. On a $A^3 - 4A^2 + 6A - 4I_3 = 0$ (C-Ham) donc $A^{n+3} = 4A^{n+2} - 6A^{n+1} + 4A^n$ et $t_{n+3} = 4t_{n+2} - 6t_{n+1} + 4t_n$.

3. $t_n = 2^2 + (1+i)^n + (1-i)^n \sim 2^n$ donc $R = \dfrac{1}{2}$ et $f(x) = \dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{1-(1+i)x} + \dfrac{1}{1-(1-i)x}$ ou bien $f(x) = t_0 + t_1x + t_2x^2 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t_{n+3}x^{n+3} = t_0 + t_1x + t_2x^2 + (4x(f(x) - t_0 - t_1x) - 6x^2(f(x) - t_0) + 4x^3 f(x))$

Exercice 29 *[sujet]* **1.** $f_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$

2. $f_{n+1}(x_n) = 1 + \dfrac{x_n^{n+1}}{n+1} > 1$ donc (x_n) décroît donc CV vers l. Puis $f_n(3/4) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-3/4) = \ln(4/3) > 1$ donc $x_n \in [0, 3/4]$ pour n grand. Par CN de la série entière sur $[0, 3/4]$, on a $1 = f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln(1-l)$ donc $l = 1 - e^{-1}$

Exercice 30 *[sujet]* On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(2n^2+3n+1)x^{n+1}$, donc $R = 1$ et $2n^2+3n+1 = 2n(n-1)+5n+1$ donc $S(x) = 2\dfrac{x^3}{(1-x)^3} + 5\dfrac{x^2}{(1-x)^2} + \dfrac{x}{1-x}$ puis $S(1/2) = 10$.

Exercice 31 *[sujet]* Si $|x| < 1$, $\arctan(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ et la série CU sur $[0,1]$: par CSSA $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2n+3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on obtient le résultat en faisant tendre x vers 1^-.

Exercice 33 *[sujet]* **1.** on pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$, $R = 1$ puis pour $|x| < 1$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+2}\right.$ $\arctan(x) - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x)$ et le résultat par CVN sur $[-1,1]$ avec $x = 1$

2. idem avec $T(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+2)}$ et, si $|x| < 1$, $T(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+1}}{2n+2}\right) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{x}{n} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+2} = -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2x}\ln(1-x^2) = \frac{1-x}{2x}\ln(1-x) + \frac{1+x}{2x}\ln(1+x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln(2)$

Exercice 32 *[sujet]* **1.** Cours

2. Si $x = \tan\dfrac{\pi}{8}$ alors x vérifie $1 = \tan\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{2x}{1-x^2}$ donc $x = -1+\sqrt{2}$ (car $x > 0$) puis $\dfrac{\pi}{8} = \arctan(\sqrt{2}-1) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n}{2n+1}(\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ car $0 < \sqrt{2}-1 < 1$

3. par CSSA, $\left|\dfrac{\pi}{8} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}(\sqrt{2}-1)^{2k+1}\right| \leqslant \dfrac{(\sqrt{2}-1)^{2n+3}}{2n+3} \leqslant \dfrac{1}{2n+3}$

Exercice 34 *[sujet]* Si $x \in [0,1[$ alors $f(x) = \dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ et $f(x)^2 = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n x^n$; reste à faire tendre x vers 1 : on pose $u_n(x) = b_n x^n$ et on a $b_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n}{(2k+1)(2n-2k+1)} = \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2n-2k+1}\right) = \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}$ (poser $p = n-k$ dans la deuxième partie de la somme). On en déduit que $\sum u_n(x)$ est alternée pour $x \in [0,1]$. De plus $|b_n| \leqslant \dfrac{1}{n+1}\left(1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (par comparaison avec une intégrale) ; reste la décroissance de $(|b_n|)$: $|b_{n+1}| - |b_n| = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \frac{n+1}{2n+3}\right) \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\left(\dfrac{n+1}{2n+1} - \dfrac{n+1}{2n+3}\right) \leqslant 0$ donc $(|u_n(x)|)$ est aussi décroissante si $x \in [0,1[$. On en déduit $|R_n(x)| \leqslant |b_{n+1}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc la série CVU sur $[0,1]$ et la somme est continue en 1. On en déduit $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = f(1)^2 = \frac{\pi^2}{16}$.

Exercice 35 *[sujet]* **1.** Si $|x|<1$ alors $\left|\dfrac{\sin(na)}{n}x^n\right| \leqslant |x|^n$ donc $f(x)$ existe ($R\geqslant 1$) et $f'(x) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n\geqslant 1} e^{ina}x^{n-1}\right) = \operatorname{Im}\left(\dfrac{e^{ia}}{1-e^{ia}x}\right) = \dfrac{\sin(a)}{1-2x\cos(a)+x^2} = \dfrac{\frac{1}{\sin(a)}}{1+\left(\frac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)^2}$ donc $f(x) = \arctan\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right) + C$ avec $C = \dfrac{\pi}{2} - a$ car $f(0)=0$.

2. Facile avec $\sin(na)x^n = S_n - S_{n-1}$

3. Même calcul que pour $f'(x)$: $S_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ika}x^k\right)$ donc $|S_n| \leqslant \dfrac{2}{|1-xe^{ia}|} \leqslant C$ car $x\mapsto \dfrac{1}{|1-xe^{ia}|}$ est continue donc bornée sur le segment $[0,1]$. La série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)S_n(x)$ CN sur $[0,1]$ donc est continue en 1. La question**2** étant valable aussi pour $x=1$, on a $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{\sin(na)}{n} = \lim_{x\to 1} f(x) = \dfrac{\pi-a}{2}$ car $\arctan\left(\dfrac{1-\cos(a)}{\sin(a)}\right) = \arctan\left(\dfrac{2\sin^2(a/2)}{2\sin(a/2)\cos(a/2)}\right) = \dfrac{a}{2}$.

Exercice 36 *[sujet]* **1.** $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n+1}{2n+3}$ donc (d'Alembert) $R=\sqrt{2}$

2. Et on en déduit que $f'(x) = a_0 + \sum_{n\geqslant 0}(2n+3)a_{n+1}x^{2n+2} = a_0 + \sum_{n\geqslant 0}\dfrac{1}{2}[(2n+1)a_n + a_n]x^{2n+2} = 1 + \dfrac{x^2}{2}f'(x) + \dfrac{x}{2}f(x)$; f est donc solution de $(2-x^2)y'(x) = xy(x)+1$ avec $y(0)=0$.

3. On résout cette équation différentielle et on trouve $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}}\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 37 *[sujet]* **1.** On a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3}$ donc $R=1$ et par Stirling $a_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$ donc $\sum a_n$ et $\sum a_n(-1)^{2n+1}$ DV (signes fixes)

2. Avec la relation entre a_{n+1} et a_n, on trouve $(1-x^2)S'(x) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1} a_{n-1}x^{2n} = 1 + xS(x)$. On en déduit, avec $S(0)=0$, $S(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin(x)$.

Exercice 38 *[sujet]* **1.** (w_n) décroît

2. $\lim w_n = 0$ par TCD avec $|\cos^n t| \leqslant 1$. La relation se trouve par IPP (cf cours intégrales de Wallis)

3. $w_n \geqslant w_{n+1} \geqslant w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}w_n$ donc $w_{n+1}\sim w_n$ donc $R=1$ par d'Alembert. Si $|x|<1$, on a $S(x) = \dfrac{\pi}{2} + x + sum_{n\geqslant 0}\left(1-\dfrac{1}{n+2}\right)w_n x^{n+2} = \dfrac{\pi}{2} + x + x^2 S(x) - \sum_{n\geqslant 0}\dfrac{w_n}{n+2}x^{n+2}$ donc $S'(x) = 1 + x^2S'(x) + 2xS(x) - xS(x)$. Les solutions de $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ sont $y(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et comme $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$, on trouve $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 39 *[sujet]* **1.** (a_n) tend vers 0 par TCD avec $\left|\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right| \leqslant 1$

2. CSSA

3. a) $\dfrac{1+t^2}{2} \geqslant t^2$ donc $a_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2n+1}$; on en déduit $R\leqslant 1$ et comme $\sum a_n x^n$ CV pour $x=-1$, on a $R\geqslant 1$ donc $R=1$.

b) On a $a_n \overset{\text{IPP}}{=} \left[t\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 t\times nt\left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^{n-1}\mathrm{d}t = 1 - n(2a_n - a_{n-1})$ donc $(2n+1)a_n = 1 + na_{n-1}$; on en déduit $x(2-x)f'(x) + (1-x)f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Les solutions de l'équation homogène sont, sur $]0,1[$ ou $]-1,0[$, $y_0(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}}$ donc les solutions sur ces intervalles sont $y(x) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{|x|(2-x)}} + f(x)$ et la seule solution sur $]-1,1[$ est f (si $\alpha\neq 0$, pas de limite finie en 0.

Si on souhaite déterminer la valeur de $f(x)$, par TITT ou CVN de $f_n : t\mapsto \left(\dfrac{1+t^2}{2}\right)^n x^n$ sur $[0,1]$ ($\|f_n\|_\infty^{[0,1]} \leqslant$

$|x|^n$ et $|x| < 1$), on a $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}t}{2-(1+t^2)x}$ qui se calcule en décomposant en éléments simples (selon le signe de x) ; tous calculs faits, on trouve $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x(2-x)}} \ln\left(\dfrac{\sqrt{2-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{2-x}-\sqrt{x}}\right)$ si $x > 0$ et $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{-x(2-x)}} \arctan\sqrt{\dfrac{-x}{2-x}}$ si $x < 0$.

Exercice 40 *[sujet]* **1.** Cours

2. $x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n$

3. $a_0 = 0$ et $(n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0$ si $n \geqslant 1$ donc $a_n = a_{n-1}$ si $n \geqslant 2$.

4. $R = 1$ (si $a_1 \neq 0$) et $f(x) = a_1 \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} x^n = a_1 \frac{x}{1-x}$ pour $|x| < 1$.

Exercice 41 *[sujet]* $\dfrac{s}{2-s^2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(\dfrac{1}{1-\frac{s}{\sqrt{2}}} - \dfrac{1}{1+\frac{s}{\sqrt{2}}}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(1-(-1)^n)\frac{s^n}{\sqrt{2}^n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{p\geqslant 0}\frac{s^{2p+1}}{\sqrt{2}^{2p+1}} = \sum_{p\geqslant 0}\frac{s^{2p+1}}{2^{p+1}}$, pour $|s| < \sqrt{2}$.

Exercice 42 *[sujet]* $f_1'(x) = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\frac{1}{1+i}}{1+\frac{x}{1+i}} - \dfrac{\frac{1}{1-i}}{1+\frac{x}{1-i}}\right) = \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{1+i}\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{(1+i)^n} - \frac{1}{1-i}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{(1-i)^n}\right)$ pour $|x| \leqslant \sqrt{2}$ puis on intègre terme à terme avec $f_1(0) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $f_1(x) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{i}{2}\left(\dfrac{1}{1+i}\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+i)^n} - \frac{1}{1-i}\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x}{(n+1}\right.$

$f_2(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} = (1+x)\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}x^{2n} = \ldots$ pour $|x| < 1$.

Exercice 43 *[sujet]* **1.** $g : t \mapsto \dfrac{\ln|1-t|}{t}$ est continue sur $]-\infty, 1[\backslash\{0\}$ et prolongeable par continuité en 0 donc f est définie sur $]-\infty, 1[$; de plus $g(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} \ln(1-t)$ donc g est intégrable sur $]0,1[$ et $D_f =]-\infty, 1]$.

2. Comme g est continue (prolongée en 0) sur $]-\infty, 1[$, f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n-1}}{n}$ pour $|x| < 1$ ($R = 1$) ; f est elle aussi DSE sur $]-1, 1[$ comme primitive d'une fonction DSE (et $R = 1$ aussi)

3. $g(t) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n(t)$ avec $f_n(t) = -\dfrac{t^{n-1}}{n}$ sur $]0,1[$ donc par TITT, avec $\displaystyle\int_0^1 |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$, on a $f(1) = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2}$.

Comme f est continue sur $[0,1[$ et $f'(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x} \xrightarrow[x\to 1]{} -\infty$, f n'est pas dérivable en 1 (TAF)

Exercice 44 *[sujet]* $t \mapsto \dfrac{t}{1+t^3}$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$; pour $|x| < 1$, $f'(x) = x\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{3n}$ donc $f(x) = f(0) + \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$ ($R = 1$)

Exercice 45 *[sujet]* **1.** $t \mapsto \dfrac{1-t}{1+t^2} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ donc $F'(x) = \dfrac{1-x}{1+x^2}$

2. $F(x) = \arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

3. si $|x| < 1$, $F'(x) = (1-x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ donc $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}x^{2n+2}$

4. On vérifie la CVN de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^2\left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]$ sur $[0,1]$ (étude de fct par ex) donc $S = f(1)$

Exercice 46 *[sujet]* $f(x) = \ln(2-x) + \ln(3-x) = -\ln(2)\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^2}{n2^n} - \ln(3)\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n3^n}$ pour $|x| < 2$.

Exercice 47 *[sujet]* Si $|x| < \dfrac{1}{2}$, on a $f(x) = \ln(1-x) + \ln(1-2x) = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n} - \sum_{n\geqslant 1}\frac{(2x)^n}{n}$.

g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \dfrac{-2x}{1+x^4}$ donc si $|x| < 1$, $g'(x) = -2x\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n x^{4n}$ puis $g(x) = \dfrac{\pi}{4} - 2\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{4n+2}$ ($R = 1$)

Exercice 48 *[sujet]* f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{-j}{1-jx} + \dfrac{-j^2}{1-j^2x}$ donc si $|x|<1$, $f'(x) = -j\sum\limits_{n\geqslant 0}(jx)^n - j^2\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(j^2x\right)^n$ puis $f(x) = -\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{j^{n+1}+j^{2(n+1)}}{n+1}x^{n+1} = -2\sum\limits_{p=1}^{+\infty}\cos\left(\dfrac{2p\pi}{3}\right)\dfrac{x^p}{p}$

Exercice 49 *[sujet]* $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1-xe^{\alpha}} - \dfrac{1}{1-xe^{-\alpha}}\right) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(e^{n\alpha}x^n - e^{-n\alpha}x^n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\mathrm{sh}(n\alpha)x^n$ pour $|x| < \dfrac{1}{e}$.

Exercice 50 *[sujet]* **1.** $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 2}\dfrac{x^{n-2}}{n!}$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

2. f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que $f(x)$ ne s'annule pas (étudier le numérateur pour vérifier qu'il ne s'annule que en 0)

Exercice 51 *[sujet]* $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-2}}{(2n)!}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f^{(2n)}(0) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+2)!}$ (les impaires sont nulles)

Exercice 52 *[sujet]* $g(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}b_nx^n$ avec $a_{2n+1}=0$ et $a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}$. On pose $f(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^n$ pour $|x|<R$ (on suppose $R>0$) ; on a $fg=1$ sur $]-R,R[$ si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k} = \delta_{0,n}$ donc $a_0=1$, $a_{2n+1}=0$ (rec) et $a_{2n} = -\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{2k}b_{2n-2k} = -\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_{2k}\dfrac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)!}$. On montre alors par récurrence que pour une telle suite on a $\left|\dfrac{a_{2n}}{2^n}\right|\leqslant 1$: pour $n=0$ OK et si l'HR est vraie pour $k\leqslant n-1$ alors $\left|\dfrac{a_{2n}}{2^n}\right| \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n-1}\left|\dfrac{a_{2k}}{2^k}\right|\dfrac{(1/2)^{n-k}}{(2n-2k+1)!} \overset{\text{HR}}{\leqslant} \sum\limits_{p=1}^{n}\dfrac{(1/2)^p}{(2p+1)!} \leqslant \sqrt{2}(\mathrm{sh}(1/\sqrt{2}) - 1/\sqrt{2}) \leqslant 1$. On a donc bien f DSE et $R\geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Par contre $R\leqslant\pi$ car f n'est pas bornée en π.

Exercice 53 *[sujet]* **1.** Si $|u|<1$, $(1+u)^{-1/2} = \sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(2^nn!)^2}u^n$ donc, si $|x|<1$, $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum\limits_{n\geqslant 0}4^{-n}\dbinom{2n}{n}x^{2n+1}$; en dérivant, on trouve $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \sum\limits_{n\geqslant 0}4^{-n}\dbinom{2n}{n}(2n+1)x^{2n}$.

2. Il suffit de retrouver le DSE de $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{1-x^2}\times(1-x^2)^{-1/2}$ par produit de Cauchy et d'identifier les coefficients de ces 2 DSE

Exercice 54 *[sujet]* **1.** $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ est DSE sur $]0,1[$, de même $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ donc, par primitive, arcsin est DSE sur $]0,1[$ puis $x\mapsto\dfrac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ aussi (car le DSE de arcsin est impair) et par produit de Cauchy, f est DSE sur $]0,1[$. De plus f est solution de $2x(1-x)y'(x)-(2x-1)y(x)=1$ avec $y(0)=\lim\limits_{0}f=1$. La seule solution DSE de cette eq diff est $y(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$ et $R=1$

2. $\sum(-1)^na_n$ vérifie le CSSA car $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2n}{2n+1}\leqslant 1$ et, avec Stirling, $a_n\sim\dfrac{1}{2\sqrt{\pi n}}$ donc $\lim a_n=0$. Par contre $\sum a_n$ DV avec l'équivalent précédent.

Exercice 55 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $f'(x) = \dfrac{1}{1-x^2} + \dfrac{x\arcsin(x)}{(1-x^2)^{3/2}}$ donc $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$

2. $x\mapsto(1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1,1[$ donc arcsin aussi (primitive) donc f aussi (produit de Cauchy)

3. Mieux vaut utiliser l'eq diff : par C-Lip (les fct $\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$ sont continues sur $]-1,1[$) f est la seule solution de l'éq diff telle que $y(0)=0$; si $y(x) = \sum\limits_{n\geqslant 0}a_nx^{2n+1}$ (f est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires) on a $(1-x^2)y'(x)+xy(x) = a_0 + \sum\limits_{n\geqslant 1}[(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n}$ donc $a_n = \dfrac{(2^nn!)^2}{(2n+1)!}$

Exercice 56 *[sujet]* **1.** $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$ est DSE sur $]-1,1[$ donc arcsin aussi par primitive puis f par produit

2. facile

3. par C-Lip (les fct $\dfrac{x}{1-x^2}$ et $\dfrac{1}{1-x^2}$ sont continues sur $]-1,1[$) f' est la seule solution de l'éq diff telle que $y(0)=0$; si $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ (f' est impaire donc on peut se limiter à chercher les sol DSE impaires) on a $(1-x^2)y'(x)+xy(x) = a_0 + \sum_{n\geqslant 1}[(2n+1)a_n - 2(n-1)a_{n-1}]x^{2n}$ donc $a_n = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$ puis $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}$

Exercice 57 *[sujet]* f est $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$ et vérifie $9(1-x^2)f''(x) - 9xf'(x) + f(x) = 0$ avec $f(0)=0$ et $f'(0) = \dfrac{1}{3}$ (f est la seule solution de ce problème de Cauchy sur $]-1,1[$). On cherche une solution DSE impaire sous la forme $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n+1}$ et on suppose $R>0$. On a $9(1-x^2)y''(x) - 9xy'(x) + y(x) = \sum_{n\geqslant 0}[9(2n+1)(2n+2)a_{n-1} - 4(3n+1)(3n+2)a_n]x^{2n+1}$ donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_n = \dfrac{4(3n+1)(3n+2)}{9(2n+1)(2n+2)}a_{n-1} = \dfrac{4^n(3n+2)!}{3^{3n}(2n+2)!n!}a_0$; on vérifie $R=1$ par d'Alembert donc $f(x) = \dfrac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{4^n(3n+2)!}{3^{3n}(2n+2)!n!}x^{2n+1}$ pour $|x|<1$.

Exercice 58 *[sujet]* **1.** $0 \leqslant \dfrac{H_n}{n!} \leqslant \dfrac{1}{(n-1)!}$ donc $R=+\infty$

2. $f'(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^n}{(n+1)!} = \dfrac{e^x-1}{x}$

3. On résout l'éq diff et on trouve (avec $f(0)=0$) $f(x) = e^x\int_0^x \dfrac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ (l'intégrale ne pose pas de pb car la fct est prolongeable par continuité en 0)

4. $\dfrac{1-e^{-t}}{t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}t^n$ donc $f(x) = e^x\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+1)!}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ puis prendre $x=1$.

Exercice 59 *[sujet]* **1.** f est $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ par récurrence.

2. Si $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ alors f est solution si et seulement si $(n+1)a_{n+1} = (\alpha+\lambda^n)a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. et on a alors $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \dfrac{|\alpha+\lambda^n|}{n+1}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $R=+\infty$ et toute série entière de cette forme est solution.

3. f est continue donc bornée sur $[-|x|,|x|]$ ($|f|\leqslant C$ sur cet intervalle) puis $f^{(p+1)}(t) = \alpha f^{(p)}(t) + \lambda^p f^{(p)}(\lambda t)$ et $|\lambda|\leqslant 1$ donnent par récurrence $|f^{(p)}| \leqslant C(1+|\alpha|)^p$. On a alors $\left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{n!}C(1+|\alpha|)^{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f est DSE sur $\mathbb{R}$.

Exercice 60 *[sujet]* **1.** Pour $\gamma=1$, $f(x) = \alpha e^x$. Pour $\gamma=-1$ on a $f'(x) = f(-x)$ donc f' est $\mathcal{C}^1$ et on a $f'(0) = f(-0) = \alpha$ et $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$ donc $f(x) = \alpha(\cos(x)+\sin(x))$

2. $R=+\infty$ par d'Alembert par ex, vérification de $f'(x) = f(\gamma x)$ facile

3. si $f'(x) = f(\gamma x)$ alors par récurrence, f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f^{(n)}(x) = \gamma^{n(n-1)/2}f(\gamma^n x)$. Sur $[-A,A]$, on a $|f^{(n)}(x)| \leqslant \|f\|_{\infty,[-A,A]}$ donc $\left|\int_0^x \dfrac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\|f\|_{\infty,[-A,A]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc f est DSE sur $[-A,A]$ pour tout A donc sur $\mathbb{R}$. En posant $f(x) = \alpha\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\dfrac{x^n}{n!}$, on trouve que f est alors la fonction de 2) donc S_α est un singleton composé de la fonction définie en 2)

Exercice 61 *[sujet]* On cherche $y(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $R>0$: $x^2y''(x) + 6xy'(x) + (6-x^2)y(x) = 6a_0 + 12a_1 x + \sum_{n\geqslant 2}[(n+2)(n+3)a_n - a_{n-2}]x^n$ donc y est solution sur $]-R,R[$ si et seulement si $a_0 = -\dfrac{1}{6}$, $a_1 = 0$ et $a_n = \dfrac{a_{n-2}}{(n+2)(n+3)}$; on en déduit $a_{2p+1} = 0$ et $a_{2p} = \dfrac{-1}{(2p+3)!}$ donc $R=+\infty$ et $y(x) = \sum_{p\geqslant 0}\dfrac{-1}{(2p+3)!}x^{2p} = \dfrac{x-\mathrm{sh}(x)}{x^3}$.

Exercice 62 *[sujet]* **1.** Par CSSA sur I, on a $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}$ donc CVU sur I qui permet d'étendre l'égalité en 1 par continuité.

2. $o(x^n)$ donc ACV si $x \in [0,1[$ et $\sim \dfrac{1}{4n^2}$ si $x=1$ (donc ACV aussi)

3. Si $x \in [0,1[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\left(x^{2n} - \frac{1}{2}x^n\right) = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2(1-x)} = \frac{1}{2(1+x)}$ donc $S(x) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x)$. Puis $S(1) = \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \ln(2)$

4. S n'est pas continue en 1 donc pas de CVU sur $[0,1]$.

Exercice 63 *[sujet]* **1.** $t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $]-\infty,1[$ (prolongeable par continuité en 0) et intégrable sur $[0,1[$ donc $D =]-\infty,1]$ et F est même $\mathcal{C}^1$ sur D

2. si $|t|<1$, $\dfrac{\ln(1-t)}{t} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{t^{n-1}}{n}$ et on intègre terme à terme sur le segment $[0,x] \subset]-1,1[$.

3. On a $F(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{x}$; vérifier que $x \mapsto F(x)+F(1-x)$ et $x \mapsto \ln(x)\ln(1-x)$ ont les mêmes dérivées. On a donc $F(x)+F(1-x) = \ln(x)\ln(1-x) + C$; par continuité de F (et S par CVN) en 1, on a $C = F(1) = -\dfrac{\pi^2}{6}$ car $\ln(x)\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Exercice 64 *[sujet]* **1.** si $|x|<1$, $x^{n^2} = o(x^n)$ et si $|x| \geqslant 1$, DVG

2. c'est une série entière (lacunaire) donc f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$

3. $t \mapsto \exp t^2\ln(x)$ décroît sur $\mathbb{R}^+$ si $x \in [0,1[$; on trouve $\displaystyle\int_1^{+\infty}\exp(t^2\ln(x))\,\mathrm{d}t \leqslant f(x) \leqslant \int_0^{+\infty}\exp(t^2\ln(x))\,\mathrm{d}t$ donc (poser $u = t\sqrt{-\ln x}$) puis $f(x) \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{-\pi\ln x}}{2}$

Exercice 65 *[sujet]* **1.** $D_f =]-1,1[$ car $R=1$ et la série DVG en ± 1

2. $(1-x)f(x) + \ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left[-\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right]x^n$ qui CVN sur $[0,1]$ car $-\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $(1-x)f(x)+\ln(1-x) \underset{x=1}{=} C + o(1)$, ce qui donne l'équivalent.

Exercice 66 *[sujet]* **1.** $R_f = R_g = 1$ car $1 \leqslant \ln(n) \leqslant n$ et $\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{-1}{n}$ par ex

2. si $x \in]-1,0]$, $\sum \ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n$ est alternée et vérifie le CSSA donc $|R_n(x)| \leqslant -\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$ (indép de x) donc CVU sur $[-1,0]$ et g est continue sur $[-1,0]$

3. si $|x|<1$, $(1-x)f(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^{n+1} \overset{k=n+1}{=} \sum_{n=2}^{+\infty}\ln(n)x^n - \sum_{k=3}^{+\infty}\ln(k-1)x^k = \sum_{n=2}^{+\infty}[\ln(n)-\ln(n-1)]x^n = -g(x)$

4. $f(x) = \dfrac{g(x)}{1-x} \xrightarrow[x\to -1^+]{} \dfrac{g(-1)}{2}$

5. on prouve $g(x) \underset{1}{\sim} h(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{-1}{n}x^n = -\frac{\ln(1-x)+x}{x}$: si $|x|<1$, $g(x)-h(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\left[\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n + \frac{1}{n}\right]x^n$ qui CVN sur $[-1,1]$ car $\left|\left[\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n + \dfrac{1}{n}\right]x^n\right| \leqslant \left[-\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x^n - \dfrac{1}{n}\right] \sim \dfrac{1}{2n^2}$; on en déduit $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x)-h(x) = \ell \in \mathbb{R}$ et $g(x) \underset{1}{\sim} h(x) \underset{1}{\sim} \ln(1-x)$. On en déduit $f(x) = \dfrac{g(x)}{1-x} \underset{1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{x-1}$

Exercice 67 *[sujet]* **1.** On prouve $H_n \sim \ln(n)$ (par la question 2 par exemple) donc $a_nH_n \sim a_n\ln n$

2. Fait en cours (dualité suite/série)

3. On pose $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}H_nx^n$ et on a $R=1$; (H_n) est le produit de Cauchy des suites $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et (1) donc $g(x) = \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$. On vérifie, avec $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln nx^n$ que $R=1$ puis $f(x)-g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(\ln(n)-H_n)x^n$. La suite $(\ln(n)-H_n)$ est bornée donc $|g(x)-f(x)| \leqslant C\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}x^n = \frac{Cx}{1-x}$; on a donc $f(x) \underset{x\to 1}{=} g(x) + O\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$ et comme $\dfrac{1}{1-x} \underset{x\to 1}{=} o(g(x))$, on a $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} g(x) \underset{x\to 1}{\sim} \dfrac{-\ln(1-x)}{1-x}$.

Exercice 68 *[sujet]* **1.** $\lim_0 f_n = 0$ et $I_n \geqslant 0$

2. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-\frac{1}{t}} t^n (t-1)\,\mathrm{d}t \leqslant 0$ donc (I_n) décroît, minorée par 0 donc CV puis $0 \leqslant I_n \leqslant e^{-1} \int_0^1 t^n \,\mathrm{d}t = \dfrac{e^{-1}}{n+1}$ donc $\lim I_n = 0$

3. facile puis $\lim I_{n-1} = 0$ donc $(n+1)I_n \to e^{-1}$

4. $R = 1$ (par equiv), $\sum I_n$ DV (par equiv SATP) et $\sum (-1)^n I_n$ CV par CSSA donc $D_g =]-1, 1]$

5. $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{1-xt} \,\mathrm{d}t$ par TITT avec $\displaystyle\int_0^1 |xt|^n e^{-\frac{1}{t}} \,\mathrm{d}t \leqslant e^{-1}|x|^n$ par ex

6. $I_n - \dfrac{e^{-1}}{n} = -\dfrac{I_n + I_{n-1}}{n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $g(x) - \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{n} x^n = I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) x^n \xrightarrow[x \to 1]{} I_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(I_n - \frac{e^{-1}}{n}\right) = \ell$ par CVN sur $[0, 1]$. On a donc $g(x) - \dfrac{e^{-1}x}{1-x} \underset{x\to 1}{=} \ell + o(1)$ donc $g(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{e^{-1}}{1-x}$

Exercice 69 *[sujet]* **1.** $\Gamma(n+1) = n!$

2. $\left(\dfrac{a_n}{n!}\rho^n\right)$ et $\left(\dfrac{A_n}{n!}\rho^n\right)$ tendent vers 0 pour tout $\rho \geqslant 0$ car (a_n) et (A_n) convergent

3. a) $g'(t) - g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A_{n+1} - A_n}{n!} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} t^n = f'(t)$

b) Les deux fonctions ont la même dérivée et sont toutes les deux nulles en 0

4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(u)\,\mathrm{d}u = A$ par TITT avec $f_n(u) = \dfrac{a_n}{n!} u^n e^{-u}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f_n(u)|\,\mathrm{d}u = |a_n|$ puis $\sum |a_n|$ CV par hypothèse.

Exercice 70 *[sujet]* **1.** $\dfrac{\mathrm{th}(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}$ donc a_n existe (si $n \geqslant 1$) puis si $t \geqslant n$, $\dfrac{\mathrm{th}(n)}{t^2} \leqslant \dfrac{\mathrm{th}(t)}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ donc $\dfrac{\mathrm{th}(n)}{n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1}{n}$. On en déduit $a_n \sim \dfrac{1}{n}$ donc $R = 1$ puis $\sum a_n$ DV et $\sum (-1)^n a_n$ CV par CSSA ($\lim a_n = 0$ car c'est le reste d'une intégrale convergente) donc $D_S = [-1, 1[$.

2. Si $x \in [-1, 0]$, le CSSA est vérifié donc $|R_n(x)| \leqslant a_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc CVU sur $[-1, 0]$ et S est continue en -1.

3. $a_n \sim \dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ puis $S(x) - \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geqslant 1} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(t) - 1}{t^2} \mathrm{d}t x^n$. On a ensuite $1 - \mathrm{th}(t) = \dfrac{2e^{-2t}}{1+e^{-2t}} \leqslant 2e^{-2t}$ donc $\left|a_n - \dfrac{1}{n}\right| \leqslant \displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{2e^{-2t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant 2e^{-2n} \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \frac{2e^{-2n}}{n}$. On en déduit la CVN sur $[0, 1]$ de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(a_n - \frac{1}{n}\right) x^n$ donc $\displaystyle\lim_{x\to 1} \sum_{n\geqslant 1} \left(a_n - \frac{1}{n}\right) x^n = \ell$ est finie. On a $S(x) \underset{x\to 1}{=} \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} + \ell + o(1) = -\ln(1-x) + \ell + o(1)$ donc $S(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)$.

Exercice 71 *[sujet]* **1.** $xy'(x) + \alpha y(x) - xy(x)^2 = \alpha a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+\alpha)a_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}\right] x^n$ donc y est solution ssi $a_0 = 1$ et $a_n = \dfrac{1}{n+\alpha} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-1-k}$ puis on vérifie par récurrence $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$

2. on a $0 \leqslant a_n \leqslant 1$ donc, pour $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

3. a) avec T-Y, comme $f(1) = 1$, on a $f(t) \underset{1}{=} f'(1)(t-1) + o(t-1)$ donc $\varphi \times f$ est bornée au voisinage de 1

b) On a $I \geqslant 0$ et $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha f(t)^2 + 2\int_0^1 t^\alpha \varphi(t) f'(t) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0 p^1 t^\alpha f'(t)^2\,\mathrm{d}t$. On a $t^\alpha \varphi(t) f(t)^2 \underset{1}{=} O(1-t)$ donc $2\displaystyle\int_0^1 t^\alpha \varphi(t) f'(t) f(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 t^{\alpha-1} \left[t\varphi'(t) + \alpha\varphi(t)\right]\mathrm{d}t \overset{(\mathcal{E})}{=} -\int_0^1 t^{\alpha-1} \left[\alpha + t\varphi(t)^2\right] f(t)^2\,\mathrm{d}t$ donc on a $I = \displaystyle\int_0^1 t^\alpha f(t)^2\,\mathrm{d}t - \alpha \int_0^1 t^{\alpha-1} f'(t)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 72 *[sujet]* **1.** $|f(x)| \leqslant \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k\right| + \varepsilon \sum_{k=n_0}^{+\infty} b_k x^k \leqslant |P(x)| + \varepsilon g(x)$ avec $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n_0-1} a_k x^k$. Comme $g(x) \geqslant b_{n_0} x^{n_0}$ et $b_{n_0} > 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{g(x)} = 0$ donc il existe A tel que, pour $x \geqslant A$, on a $|P(x)| \leqslant \varepsilon g(x)$. On en déduit, pour $x \geqslant A$, $|f(x)| \leqslant 2\varepsilon g(x)$.

2. $a_n - b_n = o(b_n)$ donc $f(x) - g(x) = o(g(x))$ avec la première question

3. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp\left[n^2\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\right] = \exp\left[n - \dfrac{1}{2} + o(1)\right] \sim \dfrac{e^n}{\sqrt{e}}$ donc $a_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{e}}\dfrac{e^n}{n!}$. On en déduit que $R = +\infty$ et, avec la question précédente, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e}}\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(ex)^n}{n!} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}e^{ex}$.

Exercice 73 *[sujet]* $\ln(\operatorname{th}(x)) = \ln(1-e^{-2x}) - \ln(1+e^{-2x}) = -\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{2}{2n+1}e^{-2(2n+1)x}$ pour $x > 0$ et on applique le TITT avec $f_n(x) = \dfrac{2}{2n+1}e^{-2(2n+1)x}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 74 *[sujet]* **1.** $I_k = \Gamma(k+1) = k!$

2. DSE de $\cos(u)$ avec $u = \sqrt{x}$

3. On applique le TITT avec $f_n(x) = (-1)^n e^{-x}\dfrac{x^k}{(2k)!}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \dfrac{k!}{(2k)!}$ qui est le terme général d'une série CV (par d'Alembert) ; on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\dfrac{k!}{(2k)!}$.

Exercice 75 *[sujet]* **1.** $f(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ et $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$

2. poser $u = \dfrac{1}{x}$

3. pour $|u| < 1$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+u^2}} = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}u^{2n}$ donc (TITT) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{1}{2n+1/2}$ car $\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{1}{2n+1/2} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}n^{3/2}}$ par Stirling.

Exercice 76 *[sujet]* **1.** $I_{k,n}$ existe si $n \geqslant 1$ et dans ce cas $I_{k,n} \overset{\text{IPP}}{=} \dfrac{k!}{n^{k+1}}$

2. $R = e$ par d'Alembert

3. $\dfrac{tx}{e^t - tx} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}t^n e^{-nt}x^n$ si $|txe^{-t}| < 1$ donc comme $\max\limits_{\mathbb{R}^+} te^{-t} = \dfrac{1}{e}$, si $|x| < e$. On a alors $\displaystyle\int_0^{+\infty}\dfrac{tx}{e^t - tx}\,\mathrm{d}t \overset{\text{TITT}}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}I_{n,n}x^n$ pour $|x| < e$.

Exercice 77 *[sujet]* **1.** $\operatorname{sh}(xt)e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

2. $F(x) \overset{\text{TITT}}{=} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}I_n$ avec $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty}t^{2n}\times te^{-t^2}\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} n!I_0 = n!\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (donc DSE pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Exercice 78 *[sujet]* **1.** $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin(t)\times\sin^{2n-1}(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} (2n-1)\int_0^{\pi/2}\cos(t)\times\cos(t)\sin^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t = (2n-1)(I_{n-1} - I_n)$ donc $I_n = \dfrac{2n-1}{2n}I_{n-1}$ puis $I_n = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

2. si $|x| < R$ et $y(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_n x^{2n}$, $x(x^2-1)y''(x) + 3x^2y'(x) + xy(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0}[(2n+1)^2a_n - (2n+2)(2n+1)a_{n+1}]x^{2n+1}$ donc f est solution sur $]-R, R[$ si et seulement si $a_{n+1} = \dfrac{2n+1}{2n+2}a_n$ donc $R = 1$ et si $|x| < 1$, on a $f(x) = a_0\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n}$

3. si $|x| < 1$, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}x^{2n} = \dfrac{2}{\pi}\sum_{n\geqslant 0}I_n x^{2n} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n\geqslant 0}\sin^{2n}(t)x^{2n}\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}g(x)$ car $|\sin^{2n}(t)x^{2n}| \leqslant |x|^{2n}$ donc CVN sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ (variable t).

Exercice 79 *[sujet]* **1.** $f(x,t) = \dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{-x}}$ donc $D_F =]-1, +\infty[$.

2. Si $a > -1$, $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,t)\right| = \dfrac{|\ln t|^n t^x}{1+t} \leqslant \dfrac{|\ln t|^n t^a}{1+t} \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^{\frac{1-a}{2}}}\right)$ et $\dfrac{1-a}{2} < 1$.

3. $t^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\ln t)^n x^n}{n!}$ puis, si $|x| < 1$, $F(x) \overset{\text{TITT}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$ avec $I_n = \int_0^1 \frac{(\ln t)^n}{1+t} \, \mathrm{d}t$ par $\int_0^1 \frac{|\ln t|^n}{1+t} \, \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (-\ln t)^n \, \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=}$ $n!$. De plus $\frac{1}{2} \int_0^1 (-\ln t)^n \, \mathrm{d}t \leqslant |I_n| \leqslant \int_0^1 (-\ln t)^n \, \mathrm{d}t$ donne $R = 1$.

Exercice 80 *[sujet]* **1.** (a_n) tend vers 0 donc $\frac{a_n}{n!} = o\left(\frac{1}{n!}\right)$ et $R = +\infty$.

2. Par IPP (c'est $\Gamma(n+1)) = n!$.

3. TITT avec $\int_0^{+\infty} \left| a_n \frac{t^n}{n!} \right| \mathrm{d}t = |a_n|$.

Exercice 81 *[sujet]* **1.** $\cos(x \cos t) = \sum_{n \geqslant 0} f_n(t)$ avec $f_n(t) = (-1)^n \frac{x^{2n} \cos^{2n} t}{(2n)!}$ et on applique le TITT avec $\int_0^\pi |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant$ $\pi \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ (série CV) ce qui donne $\int_0^\pi \cos(x \cos t) \, \mathrm{d}t = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \left(\int_0^\pi \cos^{2n} t \, \mathrm{d}t \right) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

2. On trouve 0 (soit en dérivant terme à terme deux fois et en utilisant les relations entre les intégrales de Wallis, soit avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètres et en faisant une IPP sur $f'(x)$).

Exercice 82 *[sujet]* **1.** $\varphi_\lambda(t) \underset{t \to 1}{\sim} \frac{2^{\lambda - 1/2}}{(1-t)^{1/2 - \lambda}}$ et $\frac{1}{2} - \lambda < 1$.

2. $|g(x,t)| \leqslant \varphi_\lambda(t)$ puis $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -t\varphi_\lambda(t) \sin(xt)$ donc $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant t\varphi_\lambda(t) \underset{1}{\sim} \varphi_\lambda(t)$ et $\left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t) \right| \leqslant t^2 \varphi_\lambda(t)$ indép de x et intégrable sur $[0, 1[$.
$I''_\lambda(x) = -\int_0^1 t \cos(xt) \times t\varphi_\lambda(t) \, \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 [\cos(xt) - x \sin(xt)] \frac{(1-t^2)^{\lambda+1/2}}{2\lambda+1} \, \mathrm{d}t$ puis $\int_0^1 \sin(xt)(1-t^2)^{\lambda+1/2} \, \mathrm{d}t \overset{\text{IPP}}{=}$ $\int_0^1 x \cos(xt) \frac{(1-t^2)^{\lambda+3/2}}{2\lambda+3} \, \mathrm{d}t$

3. pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, 1[$, $\cos(xt)\varphi_\lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}\varphi_\lambda(t)}{(2n)!} x^{2n}$ puis TITT, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé, (H4) $\int_0^1 |f_n(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant$ $\frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^1 \varphi_\lambda(t) \, \mathrm{d}t$

Exercice 83 *[sujet]* **1.** $g : t \mapsto \frac{e^{-t}}{1 - x \sin^2 t}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^+$ pour $x < 1$ et $g(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

2. Si $|x| < 1$, $g(t) = \sum_{n \geqslant 0} u_n(t)$ avec $u_n(t) = x^n \sin^{2n} t e^{-t}$ et on applique le TITT avec $\int_0^{+\infty} |u_n(t)| \, \mathrm{d}t \leqslant |x|^n \int_0^{+\infty} e^{-t} \, \mathrm{d}t =$ $|x|^n$ (donc série CV) ; on trouve $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t \, \mathrm{d}t \right) x^n$.

Exercice 84 *[sujet]* **1.** La série CVN sur $[-R, R]$

2. $f(t) = \frac{1}{t} [\ln(1-t) - ln(1+t)] = -\sum_{n \geqslant 0} \frac{t^{2n}}{2n+1}$ et on intègre terme à terme avec le TITT car $\int_0^1 \left| \frac{t^{2n}}{2n+1} \right| \mathrm{d}t =$ $\frac{1}{(2n+1)^2}$ (ce qui prouve aussi l'intégrabilité de f sur $]0, 1[$)

3. En posant $u = \frac{1}{t}$, on vérifie que $\int_0^f (t) \, \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} f(t) \, \mathrm{d}t$

Exercice 85 *[sujet]* **1.** récurrence

2. On en déduit $R \geqslant \frac{1}{2}$

3. Si $|x| < \frac{1}{2}$, on a $S(x) = 1 + x + \sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n] \, x^n = 1 + x + x(S(x) - 1) + 2x^2 S(x) + \frac{x^2}{1+x}$; on en déduit $S(x) = \frac{1}{1 - x - 2x^2} \left(1 + \frac{x^2}{1+x} \right) = \frac{1 + x + x^2}{(1+x)^2(1-2x)} = \frac{4}{9} \frac{1}{1-2x} + \frac{2}{9} \frac{1}{1+x} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{4}{9} \sum_{n \geqslant 0} 2^n x^n +$ $\frac{2}{9} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n x^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geqslant 0} (-1)^{n+1} (n+1) x^n$. Au final, comme $a_n \sim \frac{4}{9} \times 2^n$, on a bien $R = \frac{1}{2}$.

Exercice 86 *[sujet]* **1.** $u_{n+1}+(n+1)+1=2(u_n+n+1)$

2. $u_n=2^{n+1}-n-1$

3. $R=\dfrac{1}{2}$ et $S(x)=\dfrac{2}{1-2x}-\dfrac{x}{(1-x)^2}-\dfrac{1}{1-x}$

4. $\left|\dfrac{u_n}{2^n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{2}$ donc DVG en $\pm\dfrac{1}{2}$

5. Pour $|x|<R$, on a $S(x)=u_0+x\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}u_{n+1}x^n=1+x\sum_{n\geqslant 0}(2u_n+n)x^n=1+2xS(x)+\frac{x^2}{(1-x)^2}$ (qui donne bien le même résultat !)

Exercice 87 *[sujet]* **1.** récurrence (triple)

2. On en déduit $R\geqslant\dfrac{1}{2}$. $S(x)=-4+2x+4x^2+\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_{n+3}x^{n+3}=-4+2x+4x^2+x(S(x)+4-2x)+x^2(S(x)+4)-x^3S(x)$

3. $S(x)=\dfrac{-1}{1+x}-\dfrac{7}{1-x}+\dfrac{4}{(1-x)^2}$

4. $S(x)=-\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^nx^n-7\sum_{n\geqslant 0}x^n+4\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ donc $a_n=-7+4(n+1)+(-1)^{n+1}$

Exercice 88 *[sujet]* **1.** Par récurrence

2. Avec l'encadrement précédent, on trouve $R=1$.

3. Si $|x|<1$, $f(x)=1+x+\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\left(a_n+\frac{2}{n+1}a_{n-1}\right)x^{n+1}=1+x+x(f(x)-1)+2\sum_{n\geqslant 1}\frac{a_{n-1}}{n+1}x^{n+1}$ donc $f'(x)=1+f(x)-1+xf'(x)+2xf(x)$ puis $(1-x)f'(x)=(1+2x)f(x)$ et $f(x)=\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ car $f(0)=1$.

Exercice 89 *[sujet]* **1.** réc

2. $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n+2}>0$ donc (a_n) est croissante. On en déduit $a_n\geqslant 1$ et $a_{n+2}-a_{n+1}\geqslant\dfrac{1}{n+2}$ donc $\sum(a_{n+2}-a_{n+1})$ DV

3. $\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+\dfrac{a_n}{(n+2)a_{n+1}}$ donc $1\leqslant\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\leqslant 1+\dfrac{1}{n+2}$ puis $\lim\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1$ et $R=1$

4. $xS'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}na_nx^n=a_1x+\sum_{n\geqslant 0}(n+2)a_{n+2}x^{n+2}=x+\sum_{n\geqslant 0}[(n+2)a_{n+1}+a_n]x^{n+2}=x+\sum_{n\geqslant 0}(n+1)a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n\geqslant 0}a_{n+1}x^{n+2}+\sum_{n\geqslant 0}a_nx^{n+2}=x+x^2S'(x)+x(S(x)-a_0)+x^2S(x)=x^2S'(x)+x(x+1)S(x)$ d'où le résultat pour $x\neq 0$ et en $x=0$ par continuité en 0

5. $\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$ donc $S(x)=\dfrac{e^{-x}}{(x-1)^2}$ car $S(0)=a_0=1$

6. $e^{-x}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{n!}$ et $\dfrac{1}{(x-1)^2}=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ donc, par produit de Cauchy, $a_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{k+1}{(n-k)!}$

Exercice 90 *[sujet]* **1.** $d_2=2/3$; pour la relation de récurrence, il suffit de développer le déterminant successivement par la première colonne et par la première ligne du second déterminant qui est apparu.

2. $|d_n|\leqslant 1$ par récurrence donc $R\geqslant 1$.

3. S est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $S'(x)=d_0+2d_1x\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}(nd_{n-1}+d_{n-2})x^n=1+x+x(S'(x)-1)+xS(x)$; on en déduit la valeur de $S(x)$ (et $R=1$ car S n'est pas bornée en 1). Puis $S(x)=x\left(\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}x^n\right)\times\left(\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{x^n}{(n+1)!}\right)$ donc par produit de Cauchy et unicité des coefficients, on a $d_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}$

Exercice 91 *[sujet]* **1.** Récurrence

2. Comme $a_n\geqslant 1$, on en déduit $R\geqslant 1$; on pose $b_n=\dfrac{a_n}{n!}$ et on a $(n+2)b_{n+2}=b_{n+1}+b_n$ donc $f'(x)=\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)b_{n+1}x^n=b_1+\sum_{n\geqslant 0}(n+2)b_{n+2}x^{n+1}=b_1+\sum_{n\geqslant 0}(b_{n+1}+b_n)x^{n+1}=b_1+(f(x)-b_0)+xf(x)$ donc f est solution de $y'(x)=(1+x)y(x)$ avec $y(0)=1$.

3. On en déduit $f(x) = e^{x+x^2/2} = e^x \times e^{x^2/2} = \left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n x^n\right)$ avec $\alpha_{2n} = \frac{1}{2^n n!}$ et $\alpha_{2n+1} = 0$. Par produit de Cauchy, on a $\frac{a_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{(n-k)!}$ puis on distingue les cas n pair/impair. (En fait on a $R = +\infty$)

Exercice 92 *[sujet]* **1.** récurrence puis $R \geqslant 1$

2. $f'(x) = \frac{1}{1-x} + f(x)$

3. $y(x) = \alpha e^x + e^x \varphi(x)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 93 *[sujet]* **1.** récurrence

2. $R \geqslant \frac{1}{4}$

3. $f(x)^2 = \sum_{n\geqslant 0} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} a_{n-k}(n-k)! = (n+1)\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}$

4. $f(0) = 3$ donc $f > 0$ sur $]-h, h[$ (avec $h < R$) ; sur cet intervalle $\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$ donc $f(x) = \frac{3}{1-3x} = \sum_{n\geqslant 0} 3^{n+1} x^n$

Exercice 94 *[sujet]* **1.** On vérifie $|a_n| \leqslant 1$ par récurrence.

2. Si $|x| < 1$, $f(x) = 1 + \sum_{n\geqslant 0} a_{n+1} x^{n+1}$ donc on trouve $f'(x) = f(x) \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n+2}$ (produit de Cauchy) donc $f'(x) = -\frac{\ln(1-x)+x}{x^2} f(x)$ et en résolvant cette éq diff, avec $f(0) = 1$, on trouve $f(x) = \frac{x^2}{1-x} \exp\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$.

Exercice 95 *[sujet]* **1.** $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$ donc $a_n \leqslant (n+1)^2$ et $R \geqslant 1$ comme (a_n) ne tend pas vers 0 la série est GDV en ± 1 et $D_f =]-1,1[$.

2. Pour $|x| < 1$, on écrit $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n x^n$ et $\frac{1}{1-x^3} = \sum_{n\geqslant 0} \beta_n x^n$ et on a $\frac{1}{(1-x^2)(1-x^3)} = \sum_{n\geqslant 0} \gamma_n x^n$ avec $\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = a_n$ car $\alpha_k \beta_{n-k} = 1$ si et seulement si $k = 2p$ est pair et $n - k = 3q$ est un multiple de 3. On détermine ensuite a_n avec le DSE de $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)} = \frac{1}{(1-x)^2(1+x)(1-jx)(1-j^2)}$ qui s'obtient à partir de la décomposition en éléments simples.

Exercice 96 *[sujet]* **1.** CVS seulement et CVNTS de $]-R, R[$.

2. Pour construire une partition de $[\![1, n+1]\!]$, on commence par construire un ensemble contenant $n+1$: le nombre d'ensemble contenant $n+1$ et de cardinal $k+1$ est $\binom{n}{k}$ (il reste à choisir les k autres éléments parmi $[\![1,n]\!]$) puis il reste à constituer une partition de l'ensemble des $n+1-(k+1) = n-k$ entiers restants, il y a p_{n-k} choix possibles. Le nombre de partitions pour lesquelles $n+1$ appartient à un ensemble de cardinal $k+1$ (avec $k \geqslant 0$) est donc $\binom{n}{k} p_{n-k}$. En faisant varier $k \in [\![0,n]\!]$, on obtient $p_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k} \overset{h=n-k}{=} \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} p_h$

3. On pose $b_n = \frac{p_n}{n!}$ et on a $(n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k)!}$; on vérifie $0 \leqslant b_n \leqslant 1$ donc $R \geqslant 1$ et $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) b_{n+1} x^n = f(x) \times e^x$ par produit de Cauchy. On a donc $f(x) = f(0)\exp(e^x) = \exp(e^x - 1)$ car $f(0) = p_0 = 1$.

Exercice 97 *[sujet]* **1.** On compte le nombre de permutation de $[\![1,n]\!]$ en fonction de leur nombre de points fixes : pour créer une permutation ayant k points fixes, on choisit l'ensemble de ses k points fixes (il y a $\binom{n}{k}$ choix possible) et pour chaque choix de cet ensemble, la restriction à l'ensemble des autres $n-k$ points est une permutation sans point fixe (il y a d_{n-k} choix possibles) ; le nombre de permutations ayant k points fixes est donc $\binom{n}{k} d_{n-k} = \binom{n}{n-k} d_{n-k}$. L'égalité s'obtient en ajoutant ces quantité et en utilisant que le nombre total de permutations de $[\![1,n]\!]$ est $n!$.

2. Par définition, on a $0 \leqslant d_n \leqslant n!$ donc $R \geqslant 1$; $e^x f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ avec $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{d_k}{k!(n-k)!}$ (produit de Cauchy) donc $a_n = 1$. On a donc $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} = \left(\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n\geqslant 0} x^n\right)$ donc $d_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ (encore produit de Cauchy).

Exercice 98 *[sujet]* **1.** $I(\{1\}) = \{id\}$ donc $t_1 = 1$; $I(\{1,2\}) = \{id, (12)\}$ ((12) est l'appl qui échange 1 et 2) donc $t_2 = 2$ et $I(\{1,2,3\}) = \{id, (12), (13), (23)\}$ donc $t_3 = 4$

2. $I([\![1,n]\!]) \subset \mathcal{S}_n$ (ensemble des permutations de $[\![1,n]\!]$) donc $t_n \leqslant n!$

3. Si $g(n+2) = n+2$ alors $g_{|[\![1,n]\!]} \in I([\![1,n]\!])$ donc il y a t_{n+1} applications de ce type. Sinon $g(n+2) = k \in [\![1,n+1]\!]$ (il y a $n+1$ choix pour k) puis $g(k) = n+2$ et $g_{|E_k} \in I(E_{|E_k})$ où $E_k = [\![1,n+1]\!] \setminus \{k\}$ donc il y a $(n+1)t_n$ applications de ce type

4. si $a_n = \dfrac{t_n}{n!}$, on a $a_{n+2} = \dfrac{1}{(n+2)!}(a_{n+1} + a_n)$ donc f est solution de $f'(x) = (1+x)f(x)$ avec $f(0) = t_0 = 1$ donc $f(x) = e^{x+x^2/2}$

Exercice 99 *[sujet]* **1.** $a_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ donc $R \geqslant 1$; pour $x \in [0,1[$, on a $\left|f(x) - \sum_{n=0}^{n_0} a_n x^n\right| \leqslant \varepsilon \sum_{n\geqslant n_0+1} \dfrac{x^n}{n} = \varepsilon\left(-\ln(1-x) - \sum_{n=1}^{n_0}\right.$

on en déduit $\left|\dfrac{f(x)}{-\ln(1-x)} - 1\right| \leqslant \varepsilon + \dfrac{|P_\varepsilon(x)|}{-\ln(1-x)}$ où P_ε est un polynôme qui ne dépend que du choix de ε (donc fixé) ; Comme $\lim_{x\to 1} \dfrac{P_\varepsilon(x)}{-\ln(1-x)} = 0$, il existe $r > 0$ tel que $1 - r < x < 1 \Rightarrow \dfrac{|P_\varepsilon(x)|}{-\ln(1-x)} \leqslant \varepsilon$ donc on a bien l'équivalent demandé.

2. Pour l'exemple donné, (na_n) ne tend pas vers 0 et $f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^p} x^{2^p}$ donc $|f(x)| \leqslant \sum_{p\geqslant 0} \dfrac{1}{2^p}$ est bornée donc $f(x) \underset{x\to 1}{=} o(\ln(1-x))$.

Exercice 100 *[sujet]* **1.** $f(re^{i\theta})e^{-in\theta} = \sum_{k\geqslant 0} a_k r^k e^{i(k-n)\theta}$ et on intègre terme à terme car $\int_0^{2\pi} |a_k r^k e^{i(k-n)theta}| \,\mathrm{d}\theta = 2\pi|a_k|r^k$ (série CV) ; on ne déduit le résultat car $\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)\theta} \,\mathrm{d}\theta = 2\pi\delta_{n,k}$

2. a) $\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} \,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\pi\|f\|_\infty$

b) Quand r tend vers $+\infty$ et $p \geqslant 1$, on en déduit $a_p = 0$ donc $f = a_0$ est constante

3. On a cette fois $\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt} \,\mathrm{d}t\right| \leqslant 2\pi(\alpha r^q + \beta)$ donc $|a_p| \leqslant \alpha r^{q-p} + \beta r^{-p} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ si $p \geqslant q+1$. Il reste donc $f(x) = \sum_{n=0}^{q} a_q x^q \in \mathbb{C}_q[X]$.

Exercice 101 *[sujet]* **1.** Utiliser $a_n = R_n - R_{n+1}$

2. $|f(x) - S| \leqslant (1-x)\sum_{n=0}^{n_0} |R_n|x^n + \varepsilon \sum_{n\geqslant n_0+1} (x^n - x^{n+1}) \leqslant (1-x)(n_0+1)C + \varepsilon$ car (R_n) tend vers 0 donc est bornée et $x^{n_0+1} \leqslant 1$. n_0 étant fixé, il existe $r > 0$ tel que $1 - r < x < 1 \Rightarrow (1-x)(n_0+1)C < \varepsilon$ donc $|f(x) - S| < 2\varepsilon$ pour x proche de 1, ce qui donne le résultat.

Exercice 102 *[sujet]* Si $u_n(x) = \dfrac{\exp(in^2x)}{2^n}$ alors $\|u_n^{(p)}\|_\infty = \dfrac{n^{2p}}{2^n} = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n^{(p)}$ CVN sur $\mathbb{R}$ ce qui donne $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $f^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^{2p}}{2^n}$; on a donc (en ne gardant que le terme d'indice p, les autres étant positifs) $f^{(p)}(0) \geqslant \dfrac{p^{2p}}{2^p}$ donc $\dfrac{1}{p!}f^{(p)}(0) \geqslant \dfrac{p^{2p}}{2^p p!} \xrightarrow[p\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum \dfrac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ diverge pour tout $x \neq 0$; le rayon de convergence de la série de Taylor de f est donc nul.

Exercice 103 *[sujet]* **1.** $|g(x,t)| \leqslant e^{-t}$

2. Avec $\left|\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)\right| = t^{2k}\left|\cos\left(xt^2 + k\dfrac{\pi}{2}\right)\right| e^{-t} \leqslant t^{2k}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$

3. On a $F^{(2k+1)}(0) = 0$ et $F^{(2k)}(0) = (-1)^k \int_0^{+\infty} t^{4k}e^{-t} \,\mathrm{d}t = (-1)^k(4k)!$. La série de Taylor de F est donc $\sum_{k\geqslant 0} (-1)^k \dfrac{(4k)!}{(2k)!}x^{2k}$ dont le RCV est nul donc F n'est pas DSE.