TD16 : Espaces vectoriels normés (1)

Exercice 1
Soient $E = \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ et $\varphi \in E$ fixée telle que $\forall t \in [0,1], \varphi(t) > 0$. Pour $f \in E$, on pose $N_\varphi(f) = \|f \times \varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme sur E.

2. Montrer que N_φ et $f \mapsto \|f\|_\infty$ sont équivalentes. *(*)*

Exercice 2 (Centrale PSI 2017)
Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0,1], f(0) = f'(0) = 0\}$

1. Montrer que $N(f) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t) - 2f'(t) + f(t)|$ définit une norme sur E.

2. Soit $h(t) = f(t)e^{-t}$ avec $f \in E$; montrer que $\forall t \in [0,1], h(t) = \displaystyle\int_0^t (t-u)h''(u)\,\mathrm{d}u$.

3. Trouver $a > 0$ tel que $\|f\|_\infty \leqslant aN(f)$ pour tout $f \in E$ et minimiser a. *(*)*

4. $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|AB\| = \|BA\|$. *(*)*

2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que deux matrices semblables aient toujours la même norme. *(*)*

Exercice 4 (Centrale PC 2008)
Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

1. Étudier la suite réelle (u_n) définie par $u_0 = \lambda > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \lambda u_n^{-1})$

2. Montrer que la suite $X_0 = I_p$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(X_n + AX_n^{-1}\right)$ est définie et que $X_n = PD_nP^{-1}$ avec D_n diagonale. *(*)*

3. Montrer que (D_n) converge vers une matrice Δ

4. En déduire que (X_n) converge et que sa limite X vérifie $X^2 = A$.

5. Montrer que si on suppose A symétrique alors X est elle aussi symétrique. *(*)*

Exercice 5 (CCINP PSI 2024)

Soit $a \in \mathbb{C}$, on pose $M_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer le polynôme caractéristique P_a de M_a.
  b) Effectuer la division euclidienne de $3P_a$ par P_a' (P_a' étant la dérivée de P_a).
  c) En déduire les valeurs de a pour lesquelles M_a est diagonalisable.

2. a) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de M_a telle que $|\lambda| \geqslant 1$.
  Montrer que : $|a| \geqslant \dfrac{|\lambda|}{1+|\lambda|} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
  b) Montrer que pour $|a|$ assez petit $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Exercice 6 (Centrale PSI 2018)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positif telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On note $\alpha = \min\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$.
Pour $X \in \mathbb{R}$ à coordonnées positives, on note $\max(X)$ et $\min(X)$ la plus grande et la plus petite des coordonnées de X.

1. Si $X \in \mathbb{R}^n$ est à coordonnées positives, montrer que $\min(AX) \geqslant \alpha \max(X)$.

2. Montrer que $\min(AX) \geqslant \alpha \max(X) + (1-\alpha)\min(X)$ et $\max(AX) \leqslant \alpha \min(X) + (1-\alpha)\max(X)$. *(*)*

3. En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer le rang de la matrice limite. *(*)*

Indications

Exercice 1

2. *Utiliser le théorème des bornes atteintes (appliqué à φ).*

Exercice 2

3. *Chercher une fonction non nulle pour lesquelles les majorations faites deviennent des égalités.*

Exercice 3

1. *Tester avec A et B deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

2. *Commencer par vérifier que AB et BA sont semblables si A est inversible, puis se ramener à la première question en utilisant que toute matrice est limite d'une suite de matrices inversible.*

Exercice 4

2. *Par récurrence*

6. *Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $X = Q(A)$*

Exercice 6

2. *Introduire deux entiers i_0 et j_0 tels que $x_{i_0} = \min(X)$ et $x_{j_0} = \max(X)$*

3. *Montrer que les suites $u_p = \min(A^p X)$ et $v_p = \max(A^p X)$ convergent vers la même limite, puis choisir des vecteurs X pour conclure sur la suite (A^p).*