DM12

(Extrait de CCP PSI 2008 Maths 2)

pour le lundi 26 janvier 2026

Étant donné un endomorphisme l, pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on définit $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} l^k(x)$. En prenant différentes hypothèses pour E et pour l on étudie la limite de la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

PARTIE I : EXEMPLES

Dans cette partie E est un espace euclidien de dimension 4, rapporté à une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$.

1. Soit s l'endomorphisme de E défini par sa matrice $S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Réduction de l'endomorphisme s.

i. Calculer la matrice S^2. Justifier l'affirmation : l'endomorphisme s est diagonalisable.

ii. En déduire que 1 et -1 sont les valeurs propres de s.

On note E_1 et E_{-1} les sous-espaces propres de s respectivement associés aux valeurs propres 1 et -1. Il résulte des questions précédentes que E_1 et E_{-1} sont des sous-espaces supplémentaires de E.

iii. Calculer la trace de s. En déduire la dimension de E_1 et celle de E_{-1}.

b) On considère les trois vecteurs suivants de E : $u_1 = e_1 + e_3 + e_4$, $u_2 = e_1 + e_2 + 2e_4$ et $u_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

i. Déterminer les vecteurs $s(u_1)$ et $s(u_2)$. En déduire que (u_1, u_2) est une base de E_1.
Déterminer une base orthonormale de E_1.

ii. Déterminer un vecteur non nul $u_4 = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ orthogonal aux trois vecteurs u_1, u_2 et u_3.
En déduire que (u_3, u_4) forme une base orthogonale de E_{-1}.

c) Pour tout x de E et tout n de $\mathbb{N}^*$ on pose $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} s^k(x)$.

i. Pour $x \in E$ fixé, on note $x = y + z$ avec $y \in E_1$ et $z \in E_{-1}$.
Soit $k \in \mathbb{N}$, déterminer un réel α_k tel que $s^k(x) = y + \alpha_k z$.
En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, un réel β_n tel que $S_n(x) = y + \beta_n z$.

ii. Déduire de ce qui précède que la suite $\Big(S_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Exprimer cette limite en fonction de x et de $s(x)$.

2. Soit ℓ l'endomorphisme de E défini par sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Une propriété concernant les normes.

i. Pour tout vecteur $u = ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4$ de E calculer $\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2$.
Prouver l'inégalité $\|\ell(u)\| \leqslant \|u\|$.

ii. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un vecteur u vérifie l'égalité $\|\ell(u)\| = \|u\|$.
Déterminer $\displaystyle\max_{\|u\|=1} \|\ell(u)\|$.

iii. Montrer que 1 est valeur propre de ℓ et que le sous-espace propre associé est de dimension 2.

b) Réduction de l'endomorphisme ℓ.

i. Déterminer le polynôme caractéristique de ℓ.

ii. Montrer que ℓ possède une autre valeur propre $\lambda \neq 1$ que l'on déterminera.
Justifier que les sous-espaces propres G_1 et G_λ de ℓ associés aux valeurs propres 1 et λ sont supplémentaires dans E.

c) Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $L_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell^k(x)$.

Soit $x \in E$. On note $x = y + z$ avec $y \in G_1$ et $z \in G_\lambda$.

i. Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer $\ell^k(x)$ en fonction de y, z et k.

ii. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ exprimer $L_n(x)$ en fonction de y, z et n.

En déduire que la suite $\Big(L_n(x)\Big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

3. Soit t l'endomorphisme de E défini par sa matrice $T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(t) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) On considère les deux vecteurs suivants de E : $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 + e_4)$ et $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_3 - e_4)$.

i. On note $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, \varepsilon_1)$. Déterminer les vecteurs $t(e_1)$ et $t(\varepsilon_1)$.

En déduire que F_1 est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2, stable par t.

ii. Soit $F_2 = F_1^\perp$ l'orthogonal du sous-espace F_1. Montrer que F_2 est stable par t.

Montrer que (e_2, ε_2) est une base de F_2.

La famille de vecteurs $\mathcal{B}' = (e_1, \varepsilon_1, e_2, \varepsilon_2)$ est donc une base de E.

b) On note $T' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t)$.

i. On note, pour $\varphi \in \mathbb{R}$, $R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ et $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Exprimer la matrice T' en fonction de θ.

ii. Vérifier que, pour $(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^2$, on a $R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi)$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ exprimer en fonction de θ et k la matrice de t^k relativement à la base $\mathcal{B}'$.

c) Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\zeta_n(\omega) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\omega}$.

Expliciter $\zeta_n(\omega)$ selon les valeurs de ω.

En déduire les réels ω pour lesquels la suite complexe $(\zeta_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

d) Pour tout x de E et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $T_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t^k(x)$.

i. Justifier que le sous-espace F_1 est stable par T_n.

ii. Soit $y = \alpha e_1 + \beta\varepsilon_1 \in F_1$.

On note $t^k(y) = \gamma_k e_1 + \delta_k \varepsilon_1$, $\quad T_n(y) = \lambda_n e_1 + \mu_n \varepsilon_1$.

A. Déterminer la matrice $V_k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \gamma_k \\ \delta_k \end{pmatrix} = V_k \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

En déduire la matrice $U_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\begin{pmatrix} \lambda_n \\ \mu_n \end{pmatrix} = U_n \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

On exprimera V_k en fonction de θ et k, et U_n en fonction de θ et n.

B. Montrer que la suite $(T_n(y))_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

iii. Soit $x \in E$. En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F_1$ et $z \in F_2$, montrer que la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite lorsque n tend vers $+\infty$ et déterminer cette limite.

PARTIE II

1. Dans cette question, on considère l'espace $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien et on fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|AX\| \leqslant \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (on confond un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice colonne X, dans la base canonique)

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|A^T X\| \leqslant \|X\|$

b) Montrer que si $X \in \mathbb{R}^n$ vérifie $AX = X$ alors $\|A^T X - X\|^2 \leqslant 0$.

Montrer l'égalité $\ker(A - I_n) = \ker(A^T - I_n)$.

c) En déduire que $\ker(A - I_n)$ et $\mathrm{Im}(A - I_n)$ sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$. (on pourra commencer par démontrer que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\ker(M^T) = \mathrm{Im}(M)^\perp$.)

2. Dans cette question, on suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie et que ℓ est un endomorphisme de E tel que $\forall x \in E, \|\ell(x)\| \leqslant \|x\|$.

Soit $x \in E$. Montrer que la suite $(L_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite et la déterminer.