Correction du DM12

Extrait de CCP PSI 2008 maths 2

Partie I

1. a) i. On a $\boxed{S^2 = I_4}$ donc $(X-1)(X+1)$ est annulateur de s, scindé à racines simples donc $\boxed{s \text{ est diagonalisable}}$

ii. $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1,+1\}$, $\mathrm{Sp}(s) \neq \emptyset$ car s est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(s)$ ne peut pas être un singleton sinon, comme s est diagonalisable, s serait une homothétie. Donc $\mathrm{Sp}(s)$ contient au moins 2 éléments et $\boxed{\mathrm{Sp}(s) = \{-1,+1\}}$

iii. $\boxed{\mathrm{Tr}(s) = 0}$ donc $0 = m_1(s) + (-1)m_{-1}(s)$ donc $m_1(s) = m_{-1}(s) = 2$ et $\boxed{\dim(E_1(s)) = \dim(E_{-1}(s)) = 2}$ car s est DZ

b) i. On a $\boxed{s(u_1) = u_1 \text{ et } s(u_2) = u_2}$ donc u_1 et u_2 sont deux vecteurs libres (non colinéaires) de $E_1(s)$ donc $\boxed{(u_1, u_2) \text{ est une base de } E_1(s)}$ En appliquant le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à cette base de $E_1(s)$, on obtient $\boxed{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(e_1+e_3+e_4), \frac{1}{\sqrt{3}}(e_2-e_3+e_4)\right) \text{ est une base orthonormale de } E_1(s)}$

ii. u_4 est orthogonal à u_1, u_2 et u_3 si et seulement si $\begin{cases} a+c+d=0 \\ a+b+2d=0 \\ -a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=-d \\ c=0 \end{cases}$ donc, par exemple, le vecteur $\boxed{u_4 = e_1+e_2-e_4 \text{ convient}}$

On vérifie que $s(u_3) = -u_3$ et $s(u_4) = -u_4$ donc (u_3, u_4) est une famille de deux vecteurs non nuls et orthogonaux (donc libres) de $E_{-1}(s)$ qui est de dimension 2 donc $\boxed{(u_3, u_4) \text{ est une base orthogonale de } E_{-1}(s)}$

c) i. $s^k(x) = s^k(y) + s^k(z) = y + (-1)^k z$ donc $\boxed{S_n(x) = y + \frac{1-(-1)^n}{2n} z}$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-(-1)^n}{2n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = y = \frac{1}{2}(x+s(x))}$

2. a) i. $\ell(u) = \frac{1}{4}((3a+c)e_1 + (3b+d)e_2 + (a+3c)e_3 + (b+3d)e_4)$ donc :

$$\|u\|^2 - \|\ell(u)\|^2 = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) - \frac{1}{16}\left(3a+c)^2 + (3b+d)^2 + (a+3c)^2 + (b+3d)^2\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left[3\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) - 6ac - 6bd\right] = \frac{3}{8}\left[(a-c)^2 + (b-d)^2\right] \geqslant 0$$

donc $\boxed{\|\ell(u)\| \leqslant \|u\|}$

ii. $\|\ell(u)\| = \|u\|$ si et seulement si $a=c$ et $b=d$ donc si et seulement si $\boxed{u \in \mathrm{Vect}\{e_1+e_3, e_2+e_4\}}$

Si $\|u\| = 1$ alors $\|\ell(u)\| \leqslant 1$ et $\left\|\ell\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)\right)\right\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|e_1+e_3\| = 1$ avec $\left\|\frac{1}{\sqrt{2}}(e_1+e_3)\right\| = 1$ (car e_1 et e_3 sont orthogonaux) $\boxed{\max\limits_{\|u\|=1} \|\ell(u)\| = 1}$

iii. Si $\ell(u) = u$ alors $\|\ell(u)\| = \|u\|$ donc $E_1(\ell) \subset \mathrm{Vect}\{e_1+e_3, e_2+e_4\}$ et on vérifie que $\ell(e_1+e_3) = e_1+e_3$ et $\ell(e_2+e_4) = e_2+e_4$ donc $\boxed{1 \in \mathrm{Sp}(\ell) \text{ et } E_1(\ell) = \mathrm{Vect}\{e_1+e_3, e_2+e_4\} \text{ est de dimension } 2}$ car e_1+e_3 et e_2+e_4 sont libres.

b) i. 1 est valeur propre de ℓ d'ordre de multiplicité au moins égal à 2. Si λ et μ sont les deux autres valeurs propres complexes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell)$ (pas forcément distinctes et éventuellement égales à 1 aussi) alors on a : $\mathrm{Tr}(\ell) = 2 + \lambda + \mu = 3$ et $\det(\ell) = \lambda\mu = \frac{1}{4}$; ainsi λ et μ sont les racines de $X^2 - X + \frac{1}{4} = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2$ donc $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ et $\boxed{\mathcal{X}_l = (X-1)^2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2}$

ii. $\boxed{\lambda = \frac{1}{2} \text{ est valeur propre double}}$

On vérifie que $(X-1)\left(X-\frac{1}{2}\right)$ est annulateur de ℓ, ce polynôme est scindé à racines simples donc ℓ est diagonalisable et $\boxed{\text{les espaces propres de } \ell \text{ sont supplémentaires}}$

c) i. $\boxed{\ell^k(x) = x + \frac{1}{2^k} y}$

ii. Donc $L_n(x) = y + 2\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n} z$ et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(x) = y}$

3. a) i. $t(e_1) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}}\varepsilon_1 \in F_1$ et $t(\varepsilon_1) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}e_1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_1 \in F_1$ donc $\boxed{F_1 \text{ est stable par } t}$ et $\dim(F_1) = 2$ car (e_1, ε_1) est libre.

ii. On a $\dim(F_2) = 4 - 2 = 2$, on vérifie que e_2 et ε_2 sont 2 vecteurs libres de F_2 (car orthogonaux à e_1 et ε_1) donc que (e_2, ε_2) est une base de F_2. On a ensuite $t(e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}e_2 + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\varepsilon_2 \in F_2$ et $t(\varepsilon_2) = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}e_2 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_2 \in F_2$ donc $\boxed{F_2 \text{ est stable par } t}$

b) i. Avec les calculs des deux questions précédentes, on a $T' = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

On a $\cos\theta = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ et $\theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\theta \geqslant 0$ puis $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. On en déduit $\boxed{T' = \begin{pmatrix} R(-\theta) & 0 \\ 0 & R(\theta) \end{pmatrix}}$

ii. La relation $R(\varphi)R(\psi) = R(\varphi + \psi)$ découle des formules d'addition de cos et sin ; on en déduit, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $R(\varphi)^k = R(k\varphi)$, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}$.

On en déduit $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(t^k) = \begin{pmatrix} R(-k\theta) & 0 \\ 0 & R(k\theta) \end{pmatrix}}$

c) $e^{i\omega} = 1 \Leftrightarrow \omega \in 2\pi\mathbb{Z}$ donc $\boxed{\zeta_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{in\omega}}{1 - e^{i\omega}} & \text{si } \omega \notin 2\pi\mathbb{Z} \\ n & \text{si } \omega \in 2\pi\mathbb{Z} \end{cases}}$

On en déduit $\boxed{(\zeta_n(\omega)) \text{ est bornée si et seulement si } \omega \notin 2\pi\mathbb{Z}}$ car dans ce cas, on a $|\zeta_n(\omega)| \leqslant \dfrac{1}{|1 - e^{i\omega}|}$.

d) F_1 est stable par t donc par t^k puis par T_n

e) i. D'après **3.c.iii**, $\boxed{V_k = R(-k\theta)}$ et $U_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} R(-k\theta)$ donc $\boxed{U_n = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(\zeta_n(\theta)) & \mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)) \\ -\mathrm{Im}(\zeta_n(\theta)) & \mathrm{Re}(\zeta_n(\theta)) \end{pmatrix}}$

ii. $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$ donc $(\zeta_n(\theta))$ est bornée, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n = 0$ puis $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(y) = 0}$

f) On vérifierait de même que $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(z) = 0$ donc par linéarité de T_n, on obtient $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} T_n(x) = 0}$

Partie II

1. a) On a $\|A^TX\|^2 = (A^TX|A^TX) = (X|AA^TX) \leqslant \|X\| \times \|AA^TX\|$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. De plus $\|AA^TX\| \leqslant \|A^TX\|$ par hypothèse sur A ; on en déduit $\|A^TX\|^2 \leqslant \|X\| \times \|A^TX\|$. Si $A^TX \neq 0$ alors, en divisant par $\|A^TX\|$, on obtient $\|A^TX\| \leqslant \|X\|$ et si $A^TX = 0$ alors l'inégalité à prouver est évidente. On a donc bien $\boxed{\|A^TX\| \leqslant \|X\| \text{ pour tout } X \in \mathbb{R}^n}$

b) On a $\|A^TX - X\|^2 = \|A^TX\|^2 + \|X\|^2 - 2(A^TX|X)$ et $(A^TX|X) = (X|AX) = (X|X) = \|X\|^2$; on en déduit $\|A^TX - X\|^2 = \|A^TX\|^2 - \|X\|^2$ puis $\boxed{\|A^TX - X\|^2 \leqslant 0 \text{ si } AX = X}$ d'après la question précédente.

On vient donc de prouver que si $X \in \ker(A - I_n)$ alors $A^TX = X$, ie $X \in \ker(A^T - I_n)$. Ce qui donne $\ker(A - I_n) \subset \ker(A^T - I_n)$. De plus, $\dim(\ker(A - I_n)) = n - \mathrm{rg}(A - I_n) = n - \mathrm{rg}((A - I_n)^T) = n - \mathrm{rg}(A^T - I_n) = \dim(\ker(A^T - I_n))$ et $\boxed{\ker(A - I_n) = \ker(A^T - I_n)}$

c) $\ker(M^T) = \mathrm{Im}(M)^\perp$ a été vu en cours.

On a $\ker(A - I_n) = \ker(A^T - I_n) = \ker((A - I_n)^T) = \mathrm{Im}(A - I_n)^\perp$ donc $\boxed{\ker(A - I_n) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(A - I_n) = \mathbb{R}^n}$

2. D'après la question précédente, appliquée à A la matrice de ℓ dans une base orthonormale de E, on a la décomposition $E = \ker(\ell - id) \oplus \mathrm{Im}(\ell - id)$. On peut décomposer x en $x = y + (\ell(z) - z))$ avec $\ell(y) = y$. On obtient alors $L_n(x) = L_n(y) + L_n(\ell(z) - z)$, puis $L_n(y) = y$ car $\ell^k(y) = y$ pour tout k et $L_n(\ell(z) - z) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(\ell^{k+1}(z) - \ell^k(z)) = \dfrac{1}{n}(\ell^{n+1}(z) - z)$. On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} L_n(f(z) - z) = 0$ car $(\ell^n(z))$ est bornée ($\|\ell^n(z)\| \leqslant \|\ell^{n-1}(z)\| \leqslant \ldots \leqslant \|z\|$) donc $L_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} y$ et y est par définition $\boxed{\text{le projeté de } x \text{ sur } \ker(\ell - id), \text{ parallèlement à } \mathrm{Im}(\ell - id)}$