PSI 2 **DS5** samedi 17 janvier 2026

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Veuillez $\boxed{\textit{changer de page}}$ *au début de chacun d'entre eux.*

Problème 1

(extrait de CCP PSI 2007 maths 2)

Le produit scalaire de deux vecteurs u et v d'un espace préhilbertien sera noté $(u|v)$.

Définition : étant donnés n vecteurs $v_1,\dots,v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on appelle matrice de Gram des vecteurs $v_1,\dots,v_n$, la matrice $G(v_1,\dots,v_n)=(g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients les produits scalaires $g_{i,j}=(v_i|v_j)$.

Pour les calculs de déterminant, lorsque vous utilisez des manipulations sur les lignes ou les colonnes, il vous est demandé d'indiquer précisément quelles manipulations vous effectuez.

Partie I : Un court exemple

On considère deux réels a et b ainsi que les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\quad,\quad v=\begin{pmatrix}a\\1-a\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad w=\begin{pmatrix}1\\0\\b\end{pmatrix}$$

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire canonique.

1. Écrire la matrice de Gram G des vecteurs u,v,w.

2. a) Calculer $\det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w))$, où $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w)$ est la matrice dans la base canonique des vecteurs u,v,w.
b) En déduire que si la famille (u,v,w) est liée alors $\det(G)=0$.
c) Montrer que $\det(G)\geqslant 0$ et étudier la réciproque de la question précédente.

Partie II

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $C=(c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout entier $i\in[\![1,n]\!]$, on note X_i la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf le coefficient de la ligne i qui vaut 1.

a) Pour $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,n]\!]$, déterminer le produit $X_i^TCX_j$.
b) En déduire que $C=0$ si et seulement si pour tout couple (X,Y) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\times\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a $X^TCY=0$.

Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base quelconque de E. Soit $A=G(e_1,\dots,e_n)$ la matrice de Gram des vecteurs $e_1,\dots,e_n$.
Pour tout vecteur u de E, on note avec la même lettre majuscule U la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}$.

2. Pour tout couple (x,y) de vecteurs de E, justifier l'égalité $(x|y)=X^TAY$.

Soit $\mathcal{B}'=(e'_1,\dots,e'_n)$ une base <u>orthonormale</u> de E. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. Pour tout vecteur u de E, on note U' la matrice colonne des composantes du vecteur u relativement à la base $\mathcal{B}'$.

a) Que vaut $(x|y)$ en fonction de X' et Y' ?
b) Soit x un vecteur de E. Rappeler la relation entre les matrices X, X' et P.
c) En déduire $P^TAP=I_n$.
d) Montrer que la matrice A est inversible et que $\det(A)>0$.
e) Déduire des résultats précédents que si $(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ est une famille libre de vecteurs d'un espace préhilbertien réel, la matrice $B=G(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_p)$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ vérifie $\det(B)>0$.

4. Dans un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$, on considère n vecteurs **quelconques** $u_1,\dots,u_n$, $n\geqslant 1$. Soit $M=G(u_1,\dots,u_n)$.
À toute matrice colonne $X=\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on associe le vecteur $v=\displaystyle\sum_{i=1}^n x_iu_i$ de $\mathcal{H}$.

a) Exprimer les coefficients de la matrice MX en fonction des produits scalaires $(u_i|v)$.
b) En déduire l'égalité $X^TMX=\|v\|^2$ où $\|v\|$ est la norme du vecteur v.
c) Montrer que $MX=0$ si et seulement si v est le vecteur nul.

d) On suppose que la matrice M est inversible, déduire de la question précédente que la famille $(u_1, \ldots, u_n)$ est libre.

5. Dans cette question suppose $n \geqslant 2$ et on considère n vecteurs **unitaires** $u_1, \ldots, u_n$ d'un espace préhilbertien $\mathcal{H}$ tels qu'il existe un réel α pour lequel on a

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow (u_i|u_j) = \alpha$$

On note à nouveau M la matrice $M = G(u_1, \ldots, u_n)$.

a) Justifier que $|\alpha| \leqslant 1$.

b) Calculer $\mathrm{rg}(M - (1-\alpha)I_n)$ et en déduire que le polynôme caractéristique de M est

$$\mathcal{X}_M = (X - 1 + \alpha)^{n-1}(X - 1 - (n-1)\alpha)$$

c) Soit X un vecteur propre de M associé à la valeur propre $\lambda = 1 + (n-1)\alpha$. En utilisant **II.4.b**, montrer que $\alpha \geqslant \dfrac{-1}{n-1}$.

d) On suppose cette fois que $\alpha = \dfrac{-1}{n-1}$. Quelle est la valeur du vecteur $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i$?

Partie III : Un calcul de distance

On considère n vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ d'un espace préhilbertien réel $\mathcal{H}$ ($n \geqslant 2$).

1. Opérations sur les vecteurs d'une matrice de Gram

a) Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, \lambda v_n))$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$ et de $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n))$

b) Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n + \lambda v_1))$ en fonction de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

2. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$.

a) Soit w un vecteur de $\mathcal{H}$ orthogonal à F. Exprimer $\det(G(v_1, \ldots, v_n, w))$ en fonction de w et de $\det(G(v_1, \ldots, v_n))$.

b) Soit $v \in \mathcal{H}$, on note $d(v, F)$ la distance du vecteur v au sous-espace vectoriel F. Montrer l'égalité

$$\det(G(v_1, \ldots, v_n, v)) = (d(v,F))^2 \det(G(v_1, \ldots, v_n))$$

c) Application : calculer $d(w, F)$ avec $F = \mathrm{Vect}\{u, v\}$, où u, v et w sont les vecteurs définis dans la partie I.

fin du problème 1

Problème 2 : Une transformée de Fourier

(d'après CCP PSI 2013 maths 1)

Notations :

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on note $n!$ la factorielle de n, avec la convention $0! = 1$.

Objectifs :

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée ψ) définie par une intégrale.

La **partie I** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées h et φ) qui seront utilisées dans la **partie II**.

Partie I : Étude de deux fonctions

1. Justifier que la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

Dans la suite du problème, on admettra que la valeur de cette intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

2. Étude de la fonction h

a) Justifier l'existence, pour tout réel b, de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$$

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de I_n et déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, une relation entre I_n et I_{n+1}.

c) En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}$, on a $I_n = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)} \times \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

d) Pour $b \in \mathbb{R}$ fixé, en utilisant $\cos(2bt) = \mathrm{Re}\left(e^{2ibt}\right)$, justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a

$$\cos(2bt) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{4^n b^{2n}}{(2n)!}\, t^{2n}$$

e) En déduire une expression de $h(b)$ à l'aide de la somme d'une série.

f) En déduire que

$$\forall b \in \mathbb{R}, h(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$$

3. Étude de la fonction φ

a) Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

c) Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0,+\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\varphi(x).$$

On pourra utiliser un changement de variable.

d) Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0,+\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie II : Calcul d'une intégrale

1. Étude de la fonction ψ

a) Vérifier que l'on définit une fonction ψ, continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Calculer $\psi(0)$.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \frac{1-\exp(-p^2(1+x^2))}{2(1+x^2)}$$

Désormais, a désigne un réel fixé. On pose alors $u_{n,p} = \displaystyle\int_0^n j_p(x)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

2. Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k_n fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y\exp(-y^2x^2)\cos(2ax)\,\mathrm{d}x$$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, montrer que k_n est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$. Expliciter sa limite (on pourra utiliser les résultats de la partie I).

4. Justifier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y)\exp(-y^2)$.

5. Vérifier que $j_p(x) = \displaystyle\int_0^p y e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}y$, si $p \in \mathbb{N}^*$.

On admet alors la possibilité de permuter les deux intégrales, c'est-à-dire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n,p} = \int_0^p \left(\int_0^n y\cos(2ax)e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Calculer $\psi(a)$.

Fin du problème 2