

Variables aléatoires discrètes

Dans tout ce chapitre, \mathcal{A} désignera une tribu sur un ensemble Ω .

I Généralités

1. Définitions

Définition : Soit E un ensemble quelconque. Une **variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A})** est une application $X : \Omega \rightarrow E$ qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. L'ensemble image $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
2. Pour tout x de $X(\Omega)$, l'image réciproque de $\{x\}$ (ie l'ensemble des antécédents de x) est un événement (ie appartient à \mathcal{A}) :

$$\forall x \in X(\Omega), X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$$

Une **variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A})** est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) à valeurs réelles (ie $E = \mathbb{R}$).

Remarque(s) :

- (I.1) Si $F \subset X(\Omega)$, F est au plus dénombrable donc $F = \{x_n, n \in I\}$ avec $I \subset \mathbb{N}$ et $X^{-1}(F) = \bigcup_{n \in I} X^{-1}(\{x_n\})$ est une réunion, au plus dénombrable, d'événements donc $X^{-1}(F) \in \mathcal{A}$.
- (I.2) Si $x \in E \setminus X(\Omega)$ alors $X^{-1}(\{x\}) = \emptyset$ donc $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$ aussi.

Exemple(s) :

- (I.3) Si on tire successivement, avec remise, n boules dans une urne contenant p boules blanches et q boules noires, le nombre de boules blanches tirées est une variable aléatoire discrète .
- (I.4) Si on lance indéfiniment un dé à 6 faces et si on note X_n la valeur du dé au $n^{\text{ème}}$ lancer alors X_n est une variable aléatoire discrète .
Si on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^*, X_n = 6\}$ (avec $T = +\infty$ si l'ensemble est vide), T est une variable aléatoire discrète (le temps d'attente du premier 6).

Notations : Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) .

1. Si $U \subset X(\Omega)$, l'événement $X^{-1}(U)$ est noté $(X \in U)$ ou $\{X \in U\}$:

$$(X \in U) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \in U\}$$

2. Si $x \in X(\Omega)$, l'événement $(X \in \{x\})$ est noté plus simplement $(X = x)$:

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = x\}$$

3. Si X est à valeurs réelles et $a \in \mathbb{R}$, on utilise les notations suivantes :

$$(X \leq a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \leq a\} \quad \text{et} \quad (X \geq a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq a\}$$

$$(X < a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\} \quad \text{et} \quad (X > a) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > a\}$$

Remarque(s) :

- (I.5) Ces notations sont « compatibles » avec les opérations sur les ensembles : $(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}$, $(X \in A) \cup (X \in B) = (X \in A \cup B)$ et $(X \in A) \cap (X \in B) = (X \in A \cap B)$.
- (I.6) Si $U \in X(\Omega)$ alors $(X \in U) = \bigcup_{x \in U} (X = x)$.

Définition [I.1] : Soient X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) et f une application définie sur $X(\Omega)$ (au moins). On note $f(X)$ la variable aléatoire discrète $f \circ X$, l'image de X par l'application f .

2. Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition : Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle **loi de la variable aléatoire discrète X** l'application notée P_X définie par

$$\begin{array}{ccc} P_X & : & \mathcal{P}(X(\Omega)) \longrightarrow [0, 1] \\ & & U \mapsto P(X \in U) \end{array}$$

Remarque(s) :

- (I.7) Si $U \in X(\Omega)$, on a $P_X(U) = P(X \in U) = \sum_n p_n$ tq $x_n \in U$.
- (I.8) Cela signifie que P_X , la loi de X est entièrement déterminée par les valeurs de $P(X = x)$ quand x décrit $X(\Omega)$.
- (I.9) On peut avoir deux variables aléatoires discrètes différentes X et Y telles que $P_X = P_Y$ (donc qui aient la même loi) : on lance deux dés à 6 faces discernables et on note X la différence de la valeur du premier dé et de la valeur du second dé. Les lois de X et $-X$ sont égales alors que $X \neq -X$.

Exemple(s) :

- (I.10) On tire, avec remise, p jetons dans une urne qui contient n jetons numérotés de 1 à n et on considère X la variable aléatoire discrète égale au plus grand des numéros obtenus. Déterminer $P(X \leq k)$ et en déduire $P(X = k)$.

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X et Y suivent la même loi si $P_X = P_Y$, ie

$$X(\Omega) = Y(\Omega) \quad \text{et} \quad \forall z \in X(\Omega), P(X = z) = P(Y = z)$$

On le note alors $X \sim Y$.

Propriété [I.2] : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une application définie sur $X(\Omega)$.

$$\text{Si } X \sim Y \text{ alors } f(X) \sim f(Y)$$

II Couple de variables aléatoires discrètes

1. Loi conjointe et lois marginales

Définition [II.1] : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans E et F respectivement. On appelle **couple de variables aléatoires discrètes** (X, Y) la variable aléatoire discrète Z , à valeurs dans $E \times F$, définie par

$$\forall \omega \in \Omega, Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$$

Exemple(s) :

- (II.1) On dispose de deux dés, un bleu et un vert ; on choisit un dé au hasard et on le lance. Si C est la variable aléatoire discrète donnant la couleur du dé choisi et V la valeur obtenue sur le dé alors le couple de variables aléatoires discrètes $Z = (C, V)$ détermine complètement le résultat de l'expérience.

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On appelle **loi conjointe de X et Y** la loi du couple (X, Y) :

$$P_{(X,Y)}(U, V) = P(X \in U, Y \in V) \text{ pour } (U, V) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

La loi $P_{(X,Y)}$ est entièrement déterminée par la donnée de $P(X = x_i, Y = y_j)$ pour $(x_i, y_j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Exemple(s) :

- (II.2) On considère une urne contenant n jetons numérotées de 1 à n . On tire successivement deux boules sans remise. On note X_1 la valeur du premier jeton tiré et X_2 celui du second. On a
- $$P(X_1 = i, X_2 = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \frac{1}{n(n-1)} & \text{si } i \neq j \end{cases}$$
- On peut visualiser la loi du couple (X_1, X_2) par une matrice

$$(P(X_1 = i, X_2 = j))_{1 \leq i, j \leq n} = \frac{1}{n(n-1)} (1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

Remarque(s) :

- (II.3) On note indifféremment $(X \in A, Y \in B) = (X \in A) \cap (Y \in B)$ l'événement $(X, Y) \in A \times B$.

- (II.4) Si $Z = (X, Y)$, on a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ donc on peut vérifier que $\sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ y \in Y(\Omega)}} P(X = x, Y = y) = 1$.

Définition [II.2] : Soit Z une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $E \times F$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z(\omega) = (X(\omega), Y(\omega))$. Les applications X et Y sont alors deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) .
On appelle **lois marginales de Z** les lois des variables aléatoires discrètes X et Y .

Propriété [II.3] : Soit Z une variable aléatoire discrète sur $E \times F$. Les lois marginales de Z sont entièrement déterminées par la loi de Z : si $Z = (X, Y)$ alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ \forall y \in Y(\Omega), P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \end{array} \right.$$

Remarque(s) :

- (II.5) Si $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$ et si la loi de $Z = (X, Y)$ est visualisée par le tableau $(P(X = x_i, Y = y_j))_{(i,j) \in I \times J}$ alors $P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j)$ (somme de la $i^{\text{ème}}$ ligne) et $P(Y = y_j) = \sum_{i \in I} P(X = x_i, Y = y_j)$ (somme de la $j^{\text{ème}}$ colonne).

- (II.6) On ne peut pas retrouver la loi de Z à partir des ses lois marginales : deux variables aléatoires discrètes sur $E \times F$ différentes peuvent avoir les mêmes lois marginales ; ex : on lance une pièce équilibrée et on pose $X = 1$ si le tirage donne pile, 0 sinon ; les lois marginales de (X, X) et de $(X, 1 - X)$ sont égales mais les lois conjointes sont différentes.

- (II.7) Cette propriété se généralise à un n -uplets de variables aléatoires discrètes : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) alors, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et tout $x_k \in X_k(\Omega)$, on a

$$P(X_k = x_k) = \sum_{\substack{x_i \in X_i(\Omega) \\ i \neq k}} P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k, \dots, X_n = x_n)$$

Exemple(s) :

- (II.8) Une urne contient n boules numérotées de 1 à n , on tire successivement avec remise deux boules. On note X le plus petit des deux numéros, Y le plus grand. Déterminer la loi de (X, Y) puis celles de X et Y .

2. Conditionnement et indépendance

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) > 0$. On appelle **loi conditionnelle de Y sachant que $(X = x)$** la loi de la variable aléatoire discrète Y pour la probabilité $P_{(X=x)}$, ie

$$\forall B \in Y(\Omega), P(Y \in B | X = x) = \frac{P((X = x) \cap (Y \in B))}{P(X = x)}$$

Remarque(s) :

- (II.9) On peut, dans le cas où $P(X = x) = 0$, poser $P(Y \in B | X = x) = 0$.

- (II.10) La loi de Y sachant que $(X = x)$ est entièrement déterminée par les valeurs de $P(Y = y | X = x)$ pour tout $y \in Y(\Omega)$: si $B \subset Y(\Omega)$ alors $P(Y \in B | X = x) = \sum_{y \in B} P(Y = y | X = x)$.

- (II.11) La loi de $Z = (X, Y)$ est entièrement déterminée par la connaissance des lois de X et de Y sachant $(X = x)$, pour tout $x \in X(\Omega)$: si $(x, y) \in Z(\Omega)$, $P(Z = (x, y)) = P(Y = y | X = x) \times P(X = x)$ (même si $P(X = x) = 0$ avec la convention précédente).

La loi de Y est elle aussi connue : $P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(Y = y | X = x) \times P(X = x)$.

- (II.12) On peut définir de même la loi de Y sachant que $X \in A$, avec $A \subset X(\Omega)$ tel que $P(X \in A) > 0$, en posant $P(Y \in B | X \in A) = P_{X \in A}(Y \in B)$.

Exemple(s) :

- (II.13) On dispose d'une infinité de boîtes $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la boîte B_n contenant 2^n boules dont une seule est blanche. On lance une pièce équilibrée une infinité de fois, si on obtient le premier pile au $n^{\text{ème}}$ tirage, on tire un jeton dans la boîte B_n et on arrête l'expérience. On note X le numéro de la boîte et $Y = 1$ si la boule tirée est blanche, 0 sinon. Déterminer la loi de (X, Y) puis celle de Y .

Définition : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que **les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$$

On le note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$

Remarque(s) :

- (II.14) Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors la loi de Y sachant $(X = x)$ est la loi de Y : pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a $P(Y = y | X = x) = P(Y = y)$.

- (II.15) Lors d'une expérience aléatoire répétée deux fois de suite dans les mêmes conditions (tirage d'une boule avec remise, lancer de dé, ...), si on note X le « résultat » de la première expérience et Y celui de la deuxième, il est courant de modéliser l'expérience avec X et Y indépendantes.

Exemple(s) :

(II.16) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} et $p \in]0, 1[$.

On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathcal{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

- Déterminer la valeur de a .
- Déterminer les lois de X et Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Théorème [II.4] : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Les variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall (A, B) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega), P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$$

Définition :

1. Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . On dit que X_1, \dots, X_n sont **indépendantes** si pour tout $k \in [\![2, n]\!]$ et tout $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ dans $\mathbb{[1, n]}$, on a

$$\forall (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \in \prod_{j=1}^k X_{i_j}(\Omega), P\left(\bigcap_{1 \leq j \leq k} (X_{i_j} = x_{i_j})\right) = \prod_{j=1}^k P(X_{i_j} = x_{i_j})$$

2. Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , on dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires discrètes **indépendantes** si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille finie X_1, \dots, X_n est indépendante.

Une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes est dite **identiquement distribuée** si les X_n suivent toutes la même loi, ie

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, X_i \sim X_j$$

Remarque(s) :

(II.17) Des variables aléatoires discrètes indépendantes sont 2 à 2 indépendantes mais la réciproque est fausse; c/ex : on lance deux fois un dé à 6 faces, on note $X = 1$ (resp. $Y = 1$ et $Z = 1$) si le premier (resp. le second, la somme des 2) tirage est pair, 0 sinon. Les variables aléatoires discrètes X , Y et Z sont 2 à 2 indépendantes mais pas indépendantes.

(II.18) Pour tester si X_1, \dots, X_n sont indépendantes, il faut tester $2^n - n - 1$ ensembles d'indices $i_1 < \dots < i_k$.

(II.19) Si X_1, \dots, X_n est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes alors toute sous famille de X_1, \dots, X_n est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes.

(II.20) Si on lance une pièce une infinité de fois et si X_n est définie par $X_n = \begin{cases} 1 & \text{si pile au lancer } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ alors $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera modélisée comme une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées, suivant une loi de Bernoulli.

Théorème [II.5] : Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Les variables aléatoires discrètes X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si on a

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \subset \prod_{i=1}^n X_i(\Omega), P\left(\bigcap_{1 \leq i \leq n} (X_i \in A_i)\right) = \prod_{i=1}^n P(X_i \in A_i)$$

Propriété [II.6] :

- Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes sur (Ω, \mathcal{A}, P) , f une application définie sur $X(\Omega)$ et g une application définie sur $Y(\Omega)$.

$$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$$

- Généralisation : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) et si f_1, \dots, f_n sont des applications définies sur $X_i(\Omega)$ respectivement alors

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Remarque(s) :

(II.21) Dans cette propriété, on peut avoir $f_1 = \dots = f_n$ (à part f_i définie sur $X_i(\Omega)$, aucune hypothèse n'est nécessaire sur les f_i).

Propriété [II.7] : (Lemme des coalitions)

- Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, f et g deux applications définies respectivement sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ alors

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes

- Généralisation : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes définies sur (Ω, \mathcal{A}, P) , si I_1, \dots, I_k est une partition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ et si f_1, \dots, f_k sont définies respectivement sur $\prod_{i \in I_h} X_i(\Omega)$, pour $h \in \llbracket 1, k \rrbracket$, alors

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $f_1((X_h)_{h \in I_1}), \dots, f_k((X_h)_{h \in I_k})$ sont indépendantes

Remarque(s) :

(II.22) Le lemme des coalitions permet entre autres de prouver que si X_1, \dots, X_n sont indépendantes alors $X_1 + \dots + X_{n-1}$ et X_n sont indépendantes.

III Lois usuelles

1. Variables aléatoires discrètes finies

Définition [III.1] : (Loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) . On dit que X suit une loi de probabilité uniforme si $X(\Omega)$ est un ensemble fini de cardinal n et si

$$\forall x \in X(\Omega), P(X = x) = \frac{1}{n}$$

On le note $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Exemple(s) :

(III.1) On lance un dé à 6 faces équilibré. Si X est la variable aléatoire discrète égale au numéro de la face obtenue alors $X \sim \mathcal{U}(6)$.

Définition [III.2] : (Loi de Bernoulli)

Soient X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}) et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre p** si

$$X(\Omega) = \{0, 1\} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P(X = 1) = p \\ P(X = 0) = 1 - p \end{cases}$$

On le note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Remarque(s) :

- (III.2) Les variables de Bernoulli sont utiles pour modéliser une expérience à deux issues : si on tire une boule dans une urne contenant k boules blanches et $n - k$ boules noires, la variable aléatoire discrète $X = 1$ si la boule est blanche, 0 si elle est noire suit une loi $\mathcal{B}\left(\frac{k}{n}\right)$.
- (III.3) Un tirage de pile ou face avec une pièce équilibrée suit $\mathcal{U}(2)$ ou $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
- (III.4) Une pièce donne pile avec une probabilité p (et face avec une probabilité $1 - p$). On lance cette pièce une infinité de fois. L'expérience peut être modélisée par une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes identiquement distribuées $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui suivent toutes $\mathcal{B}(p)$.

Définition [III.3] : (Loi binomiale)

Soient X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) , $p \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit une **loi binomiale de paramètres n et p** si

$$X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On le note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Propriété [III.4] : Si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires discrètes indépendantes et suivant toutes une loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \dots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Remarque(s) :

- (III.5) Cela signifie que $\mathcal{B}(n, p)$ est utilisée pour modéliser le nombre de gains dans une succession de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p : par exemple le nombre de boules blanches obtenues dans une expérience de n tirages successifs avec remise, ou dans un jeu de pile ou face répété n fois.

2. Variables aléatoires discrètes infinies

Définition [III.5] : (Loi géométrique)

Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $p \in]0, 1[$. On dit que X suit une **loi géométrique de paramètre p** si

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

On le note $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Propriété [III.6] : Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$ alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(X > k) = (1-p)^k$$

Exemple(s) :

- (III.6) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathcal{G}(p)$ et $Z = \min(X, Y)$. Vérifier que Z suit une loi géométrique.

Propriété [III.7] : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes et identiquement distribuées suivant toutes la même loi $\mathcal{B}(p)$. On définit la variable aléatoire discrète T par

$$T = \min \{k \in \mathbb{N}^*, X_k = 1\} \text{ et } T = +\infty \text{ si l'ensemble est vide}$$

Alors la variable aléatoire discrète T suit la loi $\mathcal{G}(p)$.

$$T \sim \mathcal{G}(p)$$

Remarque(s) :

- (III.7) T désigne le temps d'attente du premier succès dans la suite d'expériences modélisée par $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$: par exemple l'obtention d'un premier pile dans un jeu de pile ou face infini, l'obtention d'un premier 6 dans une expérience de lancer de dé infini,...

Exemple(s) :

- (III.8) On lance un dé à 6 faces équilibré une infinité de fois. Déterminer la probabilité de ne pas obtenir un 6 dans les 10 lancers suivants sachant qu'on n'a pas fait de 6 dans les 100 premiers lancers.
- (III.9) Plus généralement (loi sans mémoire) : si X est une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) . Alors X suit une loi géométrique si et seulement si

$$\forall (n, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(X > n+k | X > n) = P(X > k)$$

Définition [III.8] : (Loi de Poisson)

Soient X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) et $\lambda > 0$ un réel. On dit que X suit une **loi de Poisson de paramètre λ** si

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

On le note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Exemple(s) :

- (III.10) Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant respectivement $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$. Alors la variable aléatoire discrète $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

Propriété [III.9] : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi $\mathcal{B}(n, p_n)$. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Remarque(s) :

- (III.11) On dit que la loi de Poisson est la loi des événements rares.

Exemple(s) :

- (III.12) On considère une masse de matière qui contient n atomes radioactifs. On suppose que chacun d'eux possède, indépendamment des désintégrations des autres atomes, une probabilité p de se désintégrer à un instant $\leq t_k$ donné ; on suppose que cette probabilité est très faible devant n . Le nombre d'atomes qui se désintègrent à un instant $\leq t_k$ est une variable aléatoire discrète qui suit $\mathcal{B}(n, p)$. Si on suppose que durant un laps de temps $T = np$ fixé, on observe un nombre constant λ de désintégrations alors on peut approcher le nombre de désintégrations à l'instant $\leq t_k$ par une variable aléatoire discrète suivant $\mathcal{P}(\lambda)$.

En comptant le nombre de désintégrations pendant un temps donné, un compteur Geiger peut alors donner le nombre d'atomes radioactifs présents dans la masse.

IV Espérance et variance d'une variable aléatoire discrète réelle

1. Espérance

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Si X est à valeurs positives (ie $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$) alors l'**espérance** de X est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \in [0, +\infty]$$

- Si X est à valeurs réelles ou complexes, on dit que X est d'**espérance finie** si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, ie si

$$\sum_{x \in X(\Omega)} |x|P(X = x) < +\infty$$

Dans ce cas, l'**espérance** de X est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Une variable aléatoire discrète X d'espérance finie est dite **centrée** si $E(X) = 0$.

Remarque(s) :

(IV.1) Rappel : si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$ alors $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente. La nature de cette série ne dépend pas de l'ordre dans lequel on numérote les éléments de $X(\Omega)$.

(IV.2) Si X est à valeurs dans $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ fini, on a $E(x) = \sum_{k=1}^n x_k P(X = x_k)$ (somme finie).

(IV.3) Soit X une variable aléatoire discrète réelle à valeurs bornées. Alors X est d'espérance finie.

Propriété [IV.1] : (Espérance des variables de lois usuelles)

Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

- Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$, alors $E(X) = \frac{n+1}{2}$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $E(X) = p$.
- Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $E(X) = np$.
- Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $E(X) = \lambda$.

Propriété [IV.2] : Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Alors X admet une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$ converge. Dans ce cas

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$$

Remarque(s) :

(IV.4) Sous ces hypothèses, si $P(X = +\infty) > 0$, alors on a $E(X) = +\infty$

Exemple(s) :

(IV.5) Retrouver l'espérance d'une variable aléatoire discrète suivant $\mathcal{G}(p)$.

2. Propriétés de l'espérance

Propriété [IV.3] : (Théorème de comparaison)

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que $|X| \leq Y$ et si Y est d'espérance finie alors

X est d'espérance finie.

Dans ce cas, on a de plus $|E(X)| \leq E(Y)$.

Propriété [IV.4] : (Linéarité de l'espérance)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) d'espérances finies et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ alors $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$$

Remarque(s) :

(IV.6) Si X est une variable aléatoire discrète réelle d'espérance finie alors $X^* = X - E(X)$ est centrée.

Propriété [IV.5] : (Positivité et croissance de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) d'espérance finie.

1. Si X est à valeurs positives, ie $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, alors $E(X) \geq 0$.

De plus si $E(X) = 0$ alors $P(X = 0) = 1$ (X est presque sûrement nulle).

2. Si Y est une autre variable aléatoire discrète réelle d'espérance finie et si $X \leq Y$ alors $E(X) \leq E(Y)$.

Théorème [IV.6] : (Théorème de transfert)

Soient X une variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) et f une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles. La variable aléatoire discrète $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable, ie $\sum_{x \in X(\Omega)} |f(x)|P(X = x) < +\infty$.

Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$$

Remarque(s) :

(IV.7) Si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_i \neq x_j$ pour $i \neq j$, la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable signifie que la série $\sum_{n \geq 0} f(x_n)P(X = x_n)$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a

$$E(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(x_n)P(X = x_n)$$

(IV.8) Si f est à valeurs positives, on peut toujours écrire $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x)$ avec $E(f(X)) \in [0, +\infty]$.

(IV.9) Le théorème de transfert permet de calculer $E(f(X))$ à partir de la loi de X , sans avoir à calculer la loi de $f(X)$.

(IV.10) Cette formule peut s'appliquer à toute variable aléatoire discrète, donc aussi à un couple de variables aléatoires discrètes $Z = (X, Y)$ (ou un n -uplet de variables aléatoires discrètes) : si f est définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et à valeurs réelles, $f(Z) = f(X, Y)$ est d'espérance finie si et seulement si $\sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} |f(x, y)|P(X = x, Y = y) < +\infty$ et dans ce cas

$$E(f(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} f(x, y)P(X = x, Y = y)$$

Exemple(s) :

- (IV.11) Soit X une variable aléatoire discrète suivant $\mathcal{G}(p)$. Déterminer l'espérance de $\frac{1}{X}$.
- (IV.12) Calculer $E(XY)$ pour les variables X et Y de l'ex II.16

Propriété [IV.7] :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) d'espérances finies. Si X et Y sont indépendantes alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY) = E(X) \times E(Y)$$

2. Généralisation : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et d'espérance finie alors $\prod_{i=1}^n X_i$ est d'espérance finie et

$$E\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$$

Attention : La réciproque est fausse : on peut avoir $E(XY) = E(X)E(Y)$ avec X et Y non indépendantes.

Propriété [IV.8] : (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle positive sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant une espérance finie. Pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Remarque(s) :

- (IV.13) Cette inégalité n'a bien sûr aucun intérêt si $\alpha \leq E(X)$ (donc si α est petit).

3. Variance

Propriété [IV.9] : Si X est une variable aléatoire discrète réelle telle que X^2 est d'espérance finie alors X est d'espérance finie et on a

$$E(X)^2 \leq E(X^2)$$

Remarque(s) :

- (IV.14) Plus généralement si X^k est d'espérance finie alors X^h est aussi d'espérance finie pour $h \leq k$.

Définition [IV.10] : Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Si X^2 est d'espérance finie, on dit que X **admet un moment d'ordre 2** et on définit la **variance de X** , notée $V(X)$, par

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

Dans ce cas, on définit aussi son **écart type**, note $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On dit qu'une variable aléatoire discrète X est **réduite** si $V(X) = 1$.

Remarque(s) :

- (IV.15) La variance d'une variable aléatoire discrète est donc toujours positive !

- (IV.16) La variance (et l'écart type) mesurent la dispersion des valeurs de X par rapport à sa moyenne (son espérance).

(IV.17) On dit que X admet un moment d'ordre $k \in \mathbb{N}$ si X^k est d'espérance finie. Ainsi X est d'espérance finie si et seulement si X admet un moment d'ordre 1. Toute variable aléatoire discrète admet un moment d'ordre 0 : $E(X^0) = 1$.

Propriété [IV.11] : (Variance des variables de lois usuelles)

Soit X une variable aléatoire discrète sur (Ω, \mathcal{A}, P) .

1. Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $V(X) = \frac{n^2 - 1}{12}$.
2. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors $V(X) = p(1 - p)$.
3. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $V(X) = np(1 - p)$.
4. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors $V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$.
5. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors $V(X) = \lambda$.

Propriété [IV.12] : Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant un moment d'ordre 2 alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la variable aléatoire discrète $aX + b$ admet un moment d'ordre 2 et

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

Remarque(s) :

(IV.18) Si X est une variable aléatoire discrète réelle admettant une variance alors la variable aléatoire discrète $\frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$ est réduite et centrée.

Propriété [IV.13] : (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire discrète réelle sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant un moment d'ordre 2. Alors, pour tout $\alpha > 0$, on a

$$P(|X - E(X)| \geq \alpha) \leq \frac{V(X)}{\alpha^2}$$

Remarque(s) :

(IV.19) L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de contrôler la probabilité que X s'écarte de sa moyenne.

(IV.20) Là encore, cette inégalité est sans intérêt si α est petit ($\alpha \leq \sqrt{V(X)}$).

Définition [IV.14] : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant des moments d'ordre 2. On définit la **covariance de X et Y** , notée $\text{Cov}(X, Y)$ par

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$$

Remarque(s) :

(IV.21) Si $V(X) > 0$ et $V(Y) > 0$, on définit également le *coefficient de corrélation de X et Y* , noté $\rho(X, Y)$, par $\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

Conséquence [IV.15] : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant des moments d'ordre 2. On a :

1. $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
2. Si X et Y sont indépendantes alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$.

Remarque(s) :

- (IV.22) Pour calculer $E(XY)$, on peut utiliser le théorème de transfert si on connaît la loi du couple (X, Y) .
- (IV.23) On peut avoir $\text{Cov}(X, Y) = 0$ sans que X et Y soient indépendantes (ie la réciproque de 2. est fausse) : si U et V sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathcal{B}(p)$, $X = 2U - V$ et $Y = U + 2V$ alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ mais $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$ donc X et Y ne sont pas indépendantes.

Propriété [IV.16] : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles sur (Ω, \mathcal{A}, P) admettant des moments d'ordre 2. Alors XY est d'espérance finie et

$$E(XY)^2 \leq E(X^2) \times E(Y^2)$$

Remarque(s) :

- (IV.24) On a donc $(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X) \times V(Y)$ et $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

Propriété [IV.17] : Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes réelles admettant des moments d'ordre 2, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $X_1 + \dots + X_n$ admet un moment d'ordre 2 et

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j)$$

Si on suppose de plus que les X_i sont deux à deux indépendantes alors on a

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

Théorème [IV.18] : (Loi faible des grands nombres)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes réelles indépendantes et identiquement distribuées. Si X_1 (donc tous les X_i) admet un moment d'ordre 2 et si on note $m = E(X_1)$ (leur espérance commune), $\sigma = \sigma(X_1)$ (leur écart type commun) et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ alors on a, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé,

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Remarque(s) :

- (IV.25) Il suffit en fait que les variables aléatoires discrètes soient 2 à 2 indépendantes.
- (IV.26) Une fois de plus, cela n'a d'intérêt que si ε est assez grand ($\varepsilon > \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$).

Exemple(s) :

- (IV.27) On dispose d'une pièce dont on souhaite déterminer la probabilité p qu'elle donne pile. Pour cela, on la lance un grand nombre de fois et on note X_k la variable aléatoire discrète de Bernoulli égale à 1 quand le $k^{\text{ème}}$ tirage donne pile et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ la variable aléatoire discrète donnant le nombre de pile lors des n premiers lancers. X_k suit $\mathcal{B}(p)$ donc $E(X_k) = p$ et $V(X_k) = p(1-p)$. La loi faible des grands nombres donne $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$. Ainsi la probabilité que $\frac{1}{n}S_n$ soit une valeur approchée de p à ε près sera supérieure à α à condition que $n \geq \frac{1}{4(1-\alpha)\varepsilon^2}$.

V Fonction génératrice d'une variable aléatoire discrète

Dans toute cette partie, on considère des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans \mathbb{N} , ie telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

Définition : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} . On appelle **fonction génératrice de X** , la fonction G_X définie, lorsque la série entière de variable réelle t converge, par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) \times t^n$$

Remarque(s) :

(V.1) Si $X(\Omega)$ est un ensemble fini, alors G_X est un polynôme.

(V.2) On a $G_X(1) = P(X \in \mathbb{N}) = 1$.

Propriété [V.1] : Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} P(X = n) \times t^n$ est au moins égal à 1 et la série converge normalement sur $[-1, 1]$.

Conséquence [V.2] : La loi d'une variable aléatoire discrète X à valeurs dans \mathbb{N} est entièrement déterminée par la fonction G_X :

1. G_X est continue sur $[-1, 1]$ (au moins)
2. la fonction G_X est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$ (au moins) et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$$

Remarque(s) :

(V.3) La fonction G_X peut ne pas être dérivable en ± 1 (cf lien avec l'espérance plus loin).

Propriété [V.3] : (Fonctions génératrices des lois usuelles)

Soit X une variable aléatoire discrète .

1. Si $X \sim \mathcal{B}(p)$ alors, pour $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = (1 - p) + pt$ et $R_X = +\infty$.
2. Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = [(1 - p) + pt]^n$ et $R_X = +\infty$.
3. Si $X \sim \mathcal{U}(n)$ et $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n t^k$ et $R_X = +\infty$.
4. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ alors, pour $|t| < \frac{1}{1-p}$, $G_X(t) = \frac{pt}{1 - (1-p)t}$ et $R_X = \frac{1}{1-p}$.
5. Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et $R_X = +\infty$.

Propriété [V.4] :

1. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans \mathbb{N} indépendantes. Si on note R_X et R_Y les rayons de convergences des fonctions génératrices G_X et G_Y respectivement, on a :

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), G_{X+Y}(t) = G_X(t) \times G_Y(t)$$

On a donc $R_{X+Y} \geq \min(R_X, R_Y)$.

2. Généralisation : si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires discrètes entières indépendantes alors

$$\forall |t| < \min(R_{X_1}, \dots, R_{X_n}), G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t) \times \dots \times G_{X_n}(t)$$

Remarque(s) :

- (V.4) On peut, à l'aide de cette propriété, retrouver la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli.

Exemple(s) :

- (V.5) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes indépendantes suivant toutes la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ et $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Déterminer G_{S_n} et en déduire la loi de S_n .

Théorème [V.5] : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans \mathbb{N} et G_X sa fonction génératrice.

1. X admet une espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. De plus, dans ce cas, on a

$$E(X) = G'_X(1)$$

2. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. De plus dans ce cas, on a

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$$

Remarque(s) :

- (V.6) On peut retrouver ainsi les espérances et les variances des lois usuelles.

Exemple(s) :

- (V.7) On considère l'expérience suivante : on lance une pièce équilibrée une infinité de fois, tant qu'on obtient « pile », on lance un dé équilibré à 6 faces et on avance un pion sur un plateau de jeu d'un nombre de cases égal au numéro de la face du dé (on suppose le plateau infini) ; dès qu'on obtient « face », le jeu s'arrête. On note N la variable aléatoire discrète égale au nombre de fois où on avance le pion, X_k la variable aléatoire discrète donnant le numéro de la face du dé obtenue au $k^{\text{ème}}$ tirage et S la variable aléatoire discrète égale au nombre de cases dont le pion a avancé à la fin du jeu.

a) Montrer que $P(S = n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} P(X_1 + \dots + X_k = n)$.

b) Montrer que, si $|t| \leq 1$, $G_S(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1 + \dots + X_k = n) t^n$.

c) En déduire que S admet une espérance finie et que $E(S) = \frac{7}{2}$.