PSI2 | **DM13** | pour le lundi 2 février 2026

(Extrait de CCP PC 2005 maths 2)

Partie I

On considère l'équation différentielle linéaire du 2° ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathcal{E}_\lambda) : \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

1. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$.

On supposera dans la suite du problème que $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, y désigne une fonction de la variable réelle x, admettant un développement en série entière sur $]-R, R[$ avec $R > 0$ et $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

2. Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2} a_n.$$

3. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in \left]-\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ pour que l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$?

b) Si c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathcal{E}_\lambda)$ de degré d, que nous noterons φ_d, telle que $\varphi_d(0) = 1$.

c) Expliciter la fonction polynôme φ_1.

4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\dfrac{1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{N}$.

a) On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{E}_\lambda)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

b) Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$, que nous noterons φ_λ, développable en série entière de la variable x sur $]-1, 1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.

c) Expliciter les développements en série entière de la variable x des fonctions $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

Partie II

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x\sin^2 t}\, dt.$$

1. Montrer que ψ est continue sur $[-1, +\infty[$.

2. a) Montrer que pour tout $u \in]-1, 1[$, on a $\sqrt{1+u} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n$.

b) Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $]-1, 1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt \right) x^n.$$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\, dt$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $I_n = \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1}$.
Calculer I_0. En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $]-1, 1[$.

3. Déduire du développement de ψ en série entière une expression de $\psi(x)$ en fonction de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et de $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$.