Correction du DM13

Extrait de CCP PC 2005 maths 2

Partie I :

1. $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$ sont les mêmes équations car $(-1-\lambda)(1+(-1-\lambda)) = \lambda(\lambda+1)$.

2. y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, et si $|x|<R$, on a :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ et } y''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1)a_{n+1}x^{n-1}.$$

Ainsi, $x(1+x)y''(x)+(2x+1)y(x)-\lambda(1+\lambda)y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}[n(n+1)a_{n+1}+n(n-1)a_n+2na_n+(n+1)a_{n+1}-\lambda(1+\lambda)a_n]x^n$.

Ainsi, y est solution de $\mathcal{E}_\lambda$ sur $]-R,R[$ <u>si et seulement si</u> $\forall n\in\mathbb{N}, (n+1)^2a_{n+1}+n(n+1)-\lambda(1+\lambda)a_n = 0$, ie

$$\boxed{a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)(\lambda-n)}{(n+1)^2}a_n}$$

3. a) $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet une solution polynômiale de degré d si et seulement si $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet une solution DSE dont les coefficients sont nuls à partir du rang $d+1$ et $a_d \neq 0$. Donc $(\mathcal{E}_\lambda)$ admet une solution polynômiale de degré d si et seulement si $\boxed{\lambda = d}$

b) Si $\lambda = d$ alors pour $n \leqslant d$, on a $a_{n+1} = \dfrac{(n+d+1)(d-n)}{(n+1)^2}a_n = \dfrac{(n+d+1)(d-n)}{(n+1)^2}\times\dfrac{(n+d)(d-n+1)}{n^2}a_{n-1}$ donc $a_n = \dfrac{(n+d)!(d-n)!}{(n!)^2}a_0$. Le seul polynôme solution de $(\mathcal{E}_d)$ tel que $\varphi_d(0)=1$ est donc défini par :

$$\boxed{\varphi_d = \sum_{n=0}^{d}\frac{(n+d)!(d-n)!}{(n!)^2}X^n}$$

c) $\boxed{\varphi_1 = 1+2X}$

4. a) Si $\lambda\notin\mathbb{N}$ alors $a_n\neq 0$ et pour $x\neq 0$ on a $\left|\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \dfrac{(\lambda+n+1)|\lambda-n|}{(n+1)^2}|x| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|$. On en déduit que $\sum a_nx^n$ converge absolument pour $|x|<1$ et diverge grossièrement pour $|x|>1$ donc le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n$ est $\boxed{R=1}$

b) D'après **2.** et **4.a**, l'unique solution DSE de $(\mathcal{E}_\lambda)$ sur $]-1,1[$ telle que $\varphi_\lambda(0)=1$ est définie par :

$$\boxed{\varphi_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\prod_{k=1}^{n}(\lambda+k)\times\prod_{k=0}^{n-1}(\lambda-k)}{(n!)^2}x^n \text{ pour } |x|<1}$$

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}+k\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2} = \frac{(2n)!}{4^nn!}$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right) = (-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2k+1}{2} = (-1)^n\frac{(2n)!}{4^nn!}$ donc on a :

$$\boxed{\varphi_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2x^n \text{ pour } |x|<1}$$

De même $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}+k\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2} = \frac{(2n+1)!}{4^nn!}$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!}$

donc on a : $\boxed{\varphi_{1/2}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}\right)^2x^n\text{pour } |x|<1}$

Partie II :

1. On pose $f(x,t) = \sqrt{1+x\sin^2 t}$ et on applique le théorème de continuité :

H1 : Pour $t\in[0,\pi/2]$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur $[-1,+\infty[$.

H2 : Pour $x\geqslant -1$, $t\mapsto f(x,t)$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $[0,\pi/2]$.

H3 : Pour $x\in[a,b]\subset[-1,+\infty[$, on a $|f(x,t)| = \sqrt{1+x\sin^2 t}\leqslant\sqrt{1+b\sin^2 t} = \varphi(t)$ (indépendante de x) ; φ est continue par morceaux donc intégrable sur le segment $[0,\pi/2]$.

On en déduit que $\boxed{\psi \text{ est continue sur } [-1,+\infty[}$

2. a) $\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2}\prod_{k=0}^{n-2}\frac{2k+1}{2} = (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!}$ donc on a :

$$\boxed{\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}u^n \text{ pour } |u|<1}$$

b) Soit $|x|<1$ et $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sqrt{1+x\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec $f_n(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\sin^{2n}t$.

Pour l'interversion $\sum / \int$, comme le domaine d'intégration est le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut soit utiliser le TITT, soit le faire avec un argument de convergence normale :

<u>Avec la convergence normale :</u>

H1 : les fonctions f_n sont continues sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

H2 : on a, si $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $|f_n(t)| \leqslant \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$ (indépendant de t) donc $\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$ qui est le terme général d'une série convergente car $|x|<1$ (d'après le rayon de convergence du DSE de $\sqrt{1+x}$). Ainsi $\sum f_n$ converge normalement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On en déduit : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

<u>Avec le TITT :</u>

H1 : la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers $S : t \mapsto \sqrt{1+x\sin^2 t}$.

H2 : les fonctions f_n et la fonction S sont continues par morceaux sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

H3 : les fonctions f_n sont continues par morceaux sur le segment $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc intégrables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

H4 : $\int_0^{\pi/2}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}|x|^n$ qui est le terme général d'une série convergente car $|x|<1$ (d'après le rayon de convergence du DSE de $\sqrt{1+x}$) donc $\sum\int_0^{\pi/2}|f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

On en déduit aussi : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$.

Ceci étant valable pour tout $x \in]-1,1[$, on en déduit que ψ est DSE sur $]-1,1[$ et qu'on a :

$$\boxed{\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t\right)x^n \text{ pour } |x|<1}$$

c) Cours : intégrales de Wallis $\boxed{I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}}$ donc le DSE de ψ est :

$$\boxed{\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2 x^n \text{ pour } |x|<1}$$

3. Comme $\frac{2n+1}{2n-1} = 1 + 2\frac{1}{2n-1}$, on a, pour $|x|<1$, $\varphi_{1/2}(x) = -\varphi_{-1/2}(x) + 2\psi(x)$ donc $\boxed{\psi = \frac{1}{2}\left(\varphi_{1/2}+\varphi_{-1/2}\right)}$