TD16 : Séries entières

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2018)**
Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+4n-1}{2^n(n+2)}$. *(*)*

Exercice 2 **(ENSEA/ENSIIE PSI 2024)**
On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{2+t^2}\,\mathrm{d}t$ et on définit la fonction f par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

1. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.
2. Donner une autre expression de $f(x)$ pour tout x tel que $|x| < R$.

Exercice 3 **(EIVP PSI 2016)**

1. Déterminer le DSE de $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ et en déduire celui de $\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}$. *(*)*
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 4^{-k}\binom{2k}{k} = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n}$. *(*)*

Exercice 4 **(ENSAM PSI 2018)**

1. Déterminer les x pour lesquels $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ converge. *(*)*
2. On note S la somme de cette série. Montrer que S est solution de $(1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$ en fonction de S et déterminer S.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2022)**
Soient $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, pour $n \geqslant 1$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}x^n$

1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière
2. Montrer que $f'(x) - f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
3. En déduire une autre expression de f. *(*)*
4. Montrer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!} = e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \times n!}$

Exercice 6 **(CCINP PSI 2024)**
Soient $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln(n)x^n$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n$

1. Déterminer les rayons des convergence de f et g.
2. Montrer que g est continue sur $[-1,1[$
3. Déterminer une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$
4. Montrer que f peut se prolonger par continuité à $[-1,1[$. *(*)*
5. Déterminer des équivalents de f et g en 1^-. *(*)*

Exercice 7 **(Centrale PSI 2021)**

1. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$
2. Déterminer les fonctions f DSE paires solutions de $x(x^2-1)y'' + 3x^2y' + xy = 0$
3. Comparer f et $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 - x^2\sin^2 t}$

Exercice 8 **(CCINP PSI 2024)**
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+2}$

1. Montrer que $a_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
2. Étudier la monotonie de (a_n) et en déduire que $\sum(a_{n+2} - a_{n+1})$ diverge

3. On pose $S(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
4. Montrer que S est solution de $(x-1)y' + (x+1)y = 0$
5. Déterminer la valeur de $S(x)$ puis de a_n

Indications

Exercice 1

1. *Décomposer la fraction rationnelle en éléments simples.*

Exercice 3

1. *Dériver la première fonction.*
2. *Calculer le DSE de la première question d'une autre façon puis introduire les bonnes notations pour faire un produit de Cauchy.*

Exercice 4

1. $(2n+1)! = (2n+1) \times (2n)! \sim (2n) \times (2n)!$ *avant d'utiliser Stirling pour des calculs plus simples.*

Exercice 5

1. *La solution particulière se trouve par variation de la constante (sous forme intégrale) et la fonction dans le second membre est prolongeable par continuité en* 0.

Exercice 6

4. *La limite de* g *en* -1^+ *est plus facile à étudier en remplaçant* x *par* $-t$ *(et en faisant tendre* t *vers* 1^-*).*
5. *Commencer par* g *et par un équivalent de* $\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ *quand* n *tend vers* $+\infty$.