I Suites dans les espaces vectoriels normés

1. Normes

a) Définitions, distances, normes usuelles sur $\mathbb{K}^p$.

b) Parties bornées, applications et suites bornées.

c) Normes équivalentes : définition, égalité des parties ou suites bornées pour deux normes équivalentes, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie (*admis*), utilisation des coordonnées dans une base en dimension finie.

2. Suites de vecteurs

a) Suites convergentes, divergentes ; toute suite convergente est bornée, composition de la limite par la norme. Équivalence de la convergence pour un couple de normes équivalentes, cas de la dimension finie (utilisation des coordonnées dans une base)

b) Linéarité de la limite et produit par une suite convergente scalaire.

II Séries entières

1. Convergence d'une série entière

a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 | (a_n\rho^n) \text{ est bornée}\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement

b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1}\dfrac{z^n}{n}$.

2. Somme d'une série entière

a) Continuité de la somme : convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$ dans le cas réel, continuité de la somme sur $]-R, R[$. Continuité sur le disque ouvert de rayon R dans le cas complexe (*admis*).

b) Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle : intégration terme à terme de la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence, classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme sur le disque ouvert de convergence.

3. Fonction développable en série entière

a) Série de Taylor : définition d'une fonction DSE (au voisinage de 0), série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Une fonction est DSE sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et pour tout $x \in]-r, r[$, le reste $R_n(x)$ de Taylor tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Fonctions usuelles : DSE en 0 de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (*Taylor*), $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ (*intégration*) et $(1+x)^\alpha$ (*en utilisant une équation différentielle*).

À suivre : les variables aléatoires discrètes