

# I Lois, espérances et variances

### Exercice 1 [Solution]

Une urne contient 3 boules  $B_1, B_2, B_3$ . On réalise une série de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée. Soit  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir un numéro impair pour la première fois et soit  $Y$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir chacun des 3 numéros au moins une fois.

1. Précisez  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  et donner la loi de  $X$ .
2. Soit  $k \in Y(\Omega)$ . Déterminer  $P(Y \geq k)$  et en déduire la loi de  $Y$
3. Prouver que  $Y$  admet une espérance et calculer sa valeur

### Exercice 2 (Mines-Télécom PSI 2017) [Solution]

On dispose de 5 dés honnêtes et discernables. On les lance une première fois. On met de côté les dés qui ont amené un 6 et on relance les autres dés. On répète cette opération jusqu'à ce que tous les dés aient amené un 6. Soit  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de fois où on a lancé une poignée de dés quand le jeu s'arrête.

1. Donner la loi de  $X$  ; on pourra s'intéresser à sa fonction de répartition.
2. Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance et les calculer.

### Exercice 3 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

On dispose de  $n$  boules que l'on répartit aléatoirement dans 3 urnes. On note  $X$  le nombre d'urnes vides après cette répartition.

1. Donner  $X(\Omega)$ .
2. Donner la loi de  $X$ .
3. Donner  $E(X)$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(X)$  et interpréter le résultat.

### Exercice 4 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Dans une urne avec  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$ , on effectue  $n$  tirages avec remise. On note  $X_i$  le numéro de la  $i^{\text{ème}}$  boule tirée et  $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$

1. Calculer  $P(M_n \leq k)$  et en déduire la loi de  $M_n$ .
2. a) En utilisant  $P(M_n = k) = P(M_n > k - 1) - P(M_n > k)$ , montrer que  $E(M_n) = \sum_{k=0}^{N-1} P(M_n > k)$ .  
b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(M_n)$  et interprétez.
3. a) Montrer que  $E(M_n(M_n - 1)) = 2 \sum_{k=1}^{N-1} kP(M_n > k)$  et calculer  $V(M_n)$ .  
b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(M_n)$  et interprétez.

### Exercice 5 (IMT PSI 2019) [Solution]

1.  $n$  personnes lancent chacun une pièce équilibrée. Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.
2. On note  $X$  la variable aléatoire discrète représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'une personne n'ait pas le même résultat que les autres. Donner la loi, l'espérance et la variance de  $X$

### Exercice 6 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Trois personnes  $A_1, A_2$  et  $A_3$  rentrent dans un bureau de poste. Il n'y a que deux guichets donc  $A_3$  attend son tour. On est à l'instant  $t = 0$  et le temps est compté en entiers. L'entier  $X_i$ , le temps de service de la personne  $A_i$  suit une loi géométrique de paramètre  $p$ .  $Y$  est la variable aléatoire discrète comptant l'instant où  $A_3$  peut être servie.

1. Déterminer la fonction de répartition de  $Y$  ; on pourra travailler avec  $P(Y > k)$ .
2. Montrer que  $Y$  suit une loi usuelle.
3. Déterminer le temps moyen passé par  $A_3$  au bureau de poste.

### Exercice 7 (CCINP PSI 2024) [Solution]

La secrétaire d'une société appelle les  $n$  clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On note  $X$  le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les  $n - X$  clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité  $p$  et on note  $Y$  le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note  $Z$  le nombre de clients joints au cours des deux appels et  $q = 1 - p$ .

1. Quelle est la loi de  $X$ ? Donner  $E(X)$  et  $V(X)$
2. Quelles sont les valeurs prises par  $Z$ ?
3. Déterminer  $P(Z = 0)$  et montrer que  $P(Z = 1) = np(1 + q)q^{2n-2}$
4. Calculer  $P(Y = h|X = k)$
5. Montrer que  $\binom{n}{k} \binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j} \binom{j}{k}$  puis  $P(Z = j) = \binom{n}{j} q^{2n-2j} (1 - q^2)^j$ .  
Quelle est la loi de  $Z$ ?

**Exercice 8 (CCINP PSI 2024) [Solution]**

Une urne contient 3 jetons numérotés 1, 2 et 3 que l'on tire avec remise. On note  $Y$  le nombre de tirages nécessaires pour obtenir 2 jetons différents et  $Z$  celui pour tirer les 3 jetons.

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Reconnaître  $Y - 1$  et en déduire  $E(Y)$  et  $V(Y)$
3. Déterminer la loi du couple  $(Y, Z)$ .
4. Déterminer la loi et l'espérance de  $Z$

**Exercice 9 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

On étudie une succession de lancers d'une pièce équilibrée.  $X$  est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » et  $Y$  est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile ».

1. Donner la loi conjointe de  $(X, Y)$ .
2. En déduire la loi de  $X$ .
3. Calculer  $E(X)$ .

**Exercice 10 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]**

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir un deuxième « pile » et on note  $X$  le nombre de « face » obtenus.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2.  $X$  admet-elle une espérance ?

**Exercice 11 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]**

On joue à un jeu où la probabilité de gagner une partie est  $p \in ]0, 1[$ . Le jeu se termine dès qu'on remporte deux parties consécutives. On note  $X$  la variable aléatoire discrète correspondant au numéro de la dernière partie jouée. Déterminer la loi de  $X$ .

*indication : conditionner par le résultat de la première partie.*

**Exercice 12 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $q = 1 - p$

1. Rappeler le développement en série entière de  $\frac{1}{1-x}$  et en déduire celui de  $\frac{1}{(1-x)^r}$ , pour  $r \in \mathbb{N}^*$ .
2. Pour  $k \geq 0$ , on pose  $p_k = \binom{k+r-1}{k} p^r q^k$ . Montrer que  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définit une loi de probabilité.
3. On lance une pièce qui donne pile avec la probabilité  $p$ . On note  $X$  la variable aléatoire discrète qui donne le nombre de fois où la pièce a donné face avant l'obtention du  $r^{\text{ème}}$  pile. Montrer que  $p_k = P(X = k)$ .

**Exercice 13 [Solution]**

Un élève passe un oral qui se déroule de la manière suivante : le jury pose une question ; si le candidat répond correctement alors le jury lui pose une nouvelle question ( plus difficile ). L'oral s'arrête dès que le candidat ne répond pas correctement à l'une des questions posées. On suppose de plus, qu'à chaque étape, le fait que le candidat réponde correctement ou non ne dépend que de la question posée ( donc pas de ce qui précède ) et qu'en moyenne, la probabilité qu'il réponde correctement à la  $n^{\text{ème}}$  question où  $n \geq 1$  est de  $\frac{1}{n}$ . Soit  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de questions auxquelles le candidat a répondu correctement durant cet oral.

1. Déterminer la loi de  $X$   
( Introduire  $C_i = \text{« le candidat répond correctement à la } i^{\text{ème}} \text{ question »}$ )
2. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 14 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

Le nombre d'enfants d'une famille  $N$  suit une loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ . Chaque enfant à la probabilité  $p \in ]0, 1[$  d'être une fille, indépendamment des autres. On note  $X$  le nombre de filles.

1. Déterminer la loi conjointe de  $N$  et  $X$

2. Donner la loi de  $X$ .

**Exercice 15 (Mines-Ponts PSI 2024) [Solution]**

Le nombre  $N$  d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson de paramètre  $a$ . À sa naissance, chaque enfant à une probabilité  $p \in ]0, 1[$  de survivre, indépendamment des autres. On note  $M$  le nombre d'enfants qui ont survécu

1. Déterminer la loi conjointe  $(N, M)$  puis la loi et l'espérance de  $M$
2.  $M$  et  $N - M$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 16 (CCINP PSI 2024) [Solution]**

Un conducteur se place à un carrefour et compte le nombre de personnes qui n'ont pas attaché leur ceinture de sécurité. Le nombre de voitures qui passent au carrefour est noté  $X$  et on suppose que  $X$  suit une loi de Poisson de paramètre 200. La probabilité qu'un conducteur n'ait pas attaché sa ceinture est  $\frac{3}{10}$ , indépendamment des uns des autres. On note  $S$  le nombre de conducteurs sans ceinture et  $A$  le nombre de conducteurs ayant attaché leur ceinture.

1. Déterminer  $P_{(X=n)}(S = k)$  pour  $k, n \in \mathbb{N}^*$
2. Déterminer  $P(S = k)$  et en déduire que  $S$  suit une loi de Poisson
3.  $A$  suit-elle une loi de Poisson ?
4.  $A$  et  $S$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 17 [Solution]**

Un péage d'autoroute comporte  $\alpha$  guichets. On désigne par  $N$  le nombre de voitures qui arrivent en une heure à ce péage. On admet que  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ . On suppose que chaque conducteur choisit au hasard l'un des guichets et que les choix des conducteurs sont indépendants. On désigne par  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de voitures qui passent par le guichet 2 en 1 heure.

1. Déterminer  $P_{(N=n)}(X = k)$
2. En déduire la loi de  $X$ . Calculer  $E(X)$ ,  $V(X)$ .

**Exercice 18 [Solution]**

Une pièce amène pile avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On lance la pièce une infinité de fois. Soit  $X$  variable aléatoire discrète égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir un premier pile. On définit une variable aléatoire discrète  $Y$  par :  $Y = 0$  si on obtient le premier pile à un lancer impair,  $Y = k \in \mathbb{N}^*$  si  $(X = 2k)$  est réalisé

1. Donner la loi de  $X$
2. Exprimer  $(Y = 0)$  à l'aide des  $(X = i)_{i \geq 1}$  et en déduire  $P(Y = 0)$
3. Préciser la loi de  $Y$  et  $E(Y)$ .

**Exercice 19 [Solution]**

Une urne contient  $a$  boules blanches et  $b$  boules noires. On tire successivement avec remise  $n$  boules. Soit  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de boules blanches obtenues. On suppose que ce résultat est affiché sur un compteur qui fonctionne de la manière suivante : si  $X \geq 1$  alors le compteur affiche la valeur de  $X$  (ie le nombre de boules blanches effectivement obtenues), si  $X = 0$  alors le compteur affiche un nombre qu'il choisit au hasard entre 1 et  $n$ . On note  $Y$  la valeur affichée par le compteur.

1. Rappeler la loi de  $X$  et préciser  $E(X)$ .
2. Déterminer  $Y(\Omega)$ , la loi de  $Y$  et son espérance.

**Exercice 20 (CCP PSI 2017) [Solution]**

Un joueur joue à un jeu où l'on tire un nombre  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$  avec une probabilité  $p(n) = \frac{1}{2^n}$ . Si  $n$  est pair le joueur gagne  $n$  euros, si  $n$  est impair le joueur perd  $n$  euros.

1. Quelle est la probabilité que le joueur gagne à un tirage du jeu ?
2.  $G$  est la variable aléatoire qui vaut le gain du joueur (éventuellement négatif). Calculer  $E(G)$ ,  $V(G)$ .

**Exercice 21 [Solution]**

Une urne contient des boules numérotées portant les numéros  $1, 2, \dots, r$ . On suppose que, pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , l'urne contient  $i$  boules portant le numéro  $i$ . On réalise une succession de tirages selon le protocole suivant : on tire une boule dans l'urne, cette boule porte un certain numéro, noté  $k$  ; on la remet dans l'urne et on remplace chacune des boules de l'urne ayant un numéro  $< k$  par une boule portant le numéro  $k$  (si on tire la boule  $B_1$ , on la remet simplement dans l'urne). Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $X_n$  la variable aléatoire discrète égale au numéro de la boule tirée au  $n^{\text{ème}}$  tirage. Soit  $Z$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule portant le numéro  $r$ .

1. Déterminer la loi de  $X_1$ . Montrer que  $E(X_1) = \frac{2r+1}{3}$ .

2. a) Calculer, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $P_{(X_n=r)}(X_{n+1}=r)$  et montrer que  $P_{(X_n < r)}(X_{n+1}=r) = \frac{2}{r+1}$
- b) En déduire une relation entre  $P(X_{n+1}=r)$  et  $P(X_n=r)$ .
- c) Déterminer alors  $P(X_n=r)$
3. a) Préciser  $Z(\Omega)$  et calculer  $P(Z=1)$
- b) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \geq 2$ . Montrer que  $(Z=k) = (X_k=r) \cap (X_{k-1} < r)$
- c) Montrer que  $P(Z=k) = \frac{2}{r+1} \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{k-1}$  pour  $k \geq 2$ .
- d) Prouver que  $E(Z)$  et  $V(Z)$  existent et calculer leurs valeurs.

**Exercice 22 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soit  $n$  un entier naturel non nul. On considère une urne contenant  $n-1$  boules noires et 1 boule blanche. On procède à un tirage sans remise. On note  $X$  le rang d'apparition de la boule blanche,  $Y$  le nombre de boules noires restantes dans l'urne après le tirage de la boule blanche.

1. Donner la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. Exprimer  $Y$  en fonction de  $X$ . Donner son espérance.

**Exercice 23 (Mines-Ponts PSI 2024) [Solution]**

On considère une urne composée de  $n$  boules : une est rouge,  $b$  sont blanches, et  $n-b-1$  sont noires. On note  $p = \frac{b}{n-1}$ . L'expérience consiste à tirer des boules avec remise et de s'arrêter lorsque la boule rouge est tirée. On note :  $T$  la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués en incluant celui de la boule rouge, et  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit  $r \in \mathbb{N}$ . Déterminer le rayon de convergence de la série entière  $\sum_{n \geq r} \binom{n}{r} x^{n-r}$  dont on calculera la somme.
2. Donner la loi de probabilité de  $T$ .
3. Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , calculer  $P_{(T=k)}(X=i)$ .
4. En déduire la loi de  $X$ , calculer son espérance et sa variance.

**Exercice 24 (AADN PSI 2015) [Solution]**

On admet que pour  $q \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k \geq q} \binom{k}{q} p^{k-q} = \frac{1}{(1-p)^{q+1}}$  pour  $p \in ]0, 1[$ .

Pour une expérience, on place une bactérie dans une enceinte fermée à  $t=0$ . Toutes les secondes à partir de  $t=1$ , on envoie un rayon laser dans l'enceinte. Chaque tir de laser est indépendant du précédent, et la probabilité du laser de toucher la bactérie est égale à  $p \in ]0, 1[$ . La bactérie ne peut survivre qu'à  $r$  tirs de laser avec  $r \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $X$  la variable aléatoire discrète qui compte la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de  $X$ .
2. Calculer son espérance.

**Exercice 25 (CCP PSI 2017) [Solution]**

1.  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  suivent  $\mathcal{B}(p)$  et sont mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .
2.  $N$  est une variable aléatoire discrète, indépendante des  $X_i$ , telle que  $1+N \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . Calculer, pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $|x| < 1$ ,  $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$ .
3. Déterminer  $P(S_N = k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 26 (ENSAM PSI 2018) [Solution]**

Soit  $(X_n)$  une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes suivant  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ; on note  $T$  la variable aléatoire discrète égale au plus petit rang  $n$  tel que  $X_n = X_{n+1} = 1$ . On note  $A_n$  : « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des  $n$  premiers tirages et  $X_n = 0$  » et  $B_n$  : « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des  $n$  premiers tirages et  $X_n = 1$  ». On pose  $p_n = P(A_n)$  et  $q_n = P(B_n)$ .

1. Calculer  $P(T=0)$ ,  $P(T=1)$  et  $P(T=2)$ .
2. Montrer que  $\binom{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ .
3. En déduire que  $P(T=n) = \frac{F_n}{2^{n+2}}$  où  $(F_n)$  est la suite de Fibonacci ( $F_0 = F_1 = 1$  et  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ )

**Exercice 27** [Solution]

Une boîte  $A$  contient 2 jetons discernables portant le numéro 0, une boîte  $B$  contient 2 jetons discernables portant le numéro 1. On tire au hasard un jeton dans chaque boîte puis on les change de boîte. On recommence cette opération  $n$  fois. Soit  $X_n$  la variable aléatoire discrète égale à la somme des numéros des jetons contenus dans  $A$  à l'issue du  $n$ ème échange. On convient que  $X_0 = 0$ .

1. Pour  $n \geq 2$  exprimer  $P(X_n = 0)$  à l'aide de  $P(X_{n-1} = 0)$ ,  $P(X_{n-1} = 1)$  et  $P(X_{n-1} = 2)$
2. Procéder de même pour  $P(X_n = 2)$  puis pour  $P(X_n = 1)$
3. En déduire la loi de  $X_n$ .

**Exercice 28** [Solution]

1. On lance  $N$  dés honnêtes et discernables. Soit  $X_1$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de dés qui amène la face 6. Donner la loi de  $X_1$ , préciser  $E(X_1)$  et  $V(X_1)$ .
2. On relance maintenant les dés qui n'ont pas amené 6 au lancer précédent et on note  $X_2$  le nombre de dé relancés ayant amené 6 après ces deux opérations.
  - a) Déterminer  $X_2(\Omega)$
  - b) Calculer  $P_{(X_1=i)}(X_2 = k)$
  - c) Déterminer alors la loi de  $X_2$  puis donner  $E(X_2)$ . Ne pouvait-on prévoir ce résultat ?
3. Pour  $j \geq 2$ , la  $j$ ème opération consiste à relancer les dés qui n'ont pas amené 6 lors des  $j-1$  précédents lancers. On note  $X_j$  le nombre de 6 obtenus après cette  $j$ ème opération. Déterminer la loi de  $X_j$ .

**Exercice 29** (Centrale PSI 2015) [Solution]

Dans un ascenseur à  $p$  étages se trouvent  $n$  personnes, les  $n$  personnes doivent descendre à l'un des  $p$  étages de manière équiprobable et indépendamment les uns des autres. Soit  $X$  la variable aléatoire discrète qui est le nombre d'arrêts. Soit la variable aléatoire discrète  $X_i$  qui est le nombre de personnes qui descendent à l'étage  $i$ .

1. Quelle est la loi de  $X_i$  ?
2. Déterminer l'espérance de  $X$ . (*indication : compter plutôt le nombre d'étages sans arrêt*)
3. Donner la limite de  $E(X)$  quand  $p$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 30** (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n, p$ . Soit  $Y$  une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On suppose  $X$  et  $Y$  indépendantes.

Soit  $Z$  la variable aléatoire définie par  $Z(\omega) = \begin{cases} X(\omega) & \text{si } X(\omega) \neq 0 \\ Y(\omega) & \text{si } X(\omega) = 0 \end{cases}$

Trouver la loi de  $Z$ , puis son espérance.

**Exercice 31** [Solution]

A la fête foraine, un jeu est constitué d'une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$  dans laquelle plonge un bras articulé qui en extrait simultanément une poignée contenant un nombre de boules qu'il choisit au hasard entre 0 et  $n$ . Soit  $X$  la variable aléatoire discrète égale à la somme des numéros obtenus.

Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on pose  $X_k = \begin{cases} k & \text{si on tire le numéro } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que  $\frac{X_k}{k} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ . On pourra introduire  $A_i = \llbracket \text{on a tiré une poignée contenant } i \text{ boules} \rrbracket$ .
2. Calculer  $E(X)$ .

**Exercice 32** (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  ; on pose  $Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si } X \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ .

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Déterminer  $E(Y)$ .
3. Déterminer  $E(Y^2)$

**Exercice 33** (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes telles que  $X_n(\Omega) = \{-1, 1\}$ ,  $P(X_n = 1) = 1 - p$  et  $P(X_n = -1) = p \in ]0, 1[$ . On pose  $Z_n = \prod_{i=1}^n X_i$ .

1. Déterminer  $E(Z_n)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(Z_n)$ .
2. Déterminer la loi de  $Z_n$ .  
*indication : développer  $(p + (1-p))^n$  et  $(p - (1-p))^n$*

3. À quelle condition sur  $p$ ,  $Z_1$  et  $Z_2$  sont-elles indépendantes ?

*indication : trouver une condition nécessaire sur  $p$  avec l'espérance.*

**Exercice 34 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]**

Soit  $(X_k)_{k \geq 1}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{B}\left(\frac{2}{3}\right)$ . On définit les événements  $A_k =$

$(X_{2k-1}X_{2k} = 0)$ ,  $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$  et la variable aléatoire discrète  $T = \min\{k \geq 2, X_{k-1} = X_k = 1\}$

1. Montrer que  $P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$  et en déduire  $P(T \in \mathbb{N}) = 1$

2. Trouver une relation de récurrence vérifiée par la suite  $(P(T = n))_{n \in \mathbb{N}}$

3. Déterminer l'espérance de  $T$

**Exercice 35 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]**

Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$  et vers la gauche avec la probabilité  $1 - p$ . À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note  $X_n$  sa position après  $n$  déplacements.

- Que vaut  $X_n(\Omega)$  ?
- On note  $D_n$  le nombre de déplacements vers la droite au cours des  $n$  premiers instants. Relier  $X_n$  à  $D_n$ .
- Déterminer les lois de  $D_n$  et  $X_n$ .
- Calculer l'espérance de  $X_n$ .

**Exercice 36 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]**

Une marche aléatoire discrète sur une droite débute en  $t = 0$  à l'origine ; à chaque instant, la probabilité d'aller à droite (+1 case) est  $p$ , celle d'aller à gauche (-1 case) est  $1 - p$ . On note  $X_n$  la variable aléatoire discrète donnant la position après  $n$  déplacements.

- Déterminer la loi de  $X_n$ .  
*indication : introduire  $V_n$  qui vaut 0 ou 1 selon que le déplacement se fait vers la droite ou vers la gauche et relier  $X_{n+1} - X_n$  à  $V_{n+1}$ .*
- Calculer  $E(X_n)$  ; pour quelle valeur de  $p$ ,  $X_n$  est-elle centrée ?
- Calculer  $V(X_n)$ .

**Exercice 37 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]**

Une urne contient  $n$  boules distinctes  $B_1, \dots, B_n$ , que l'on tire successivement et avec remise. Soit  $Y_r$  la variable aléatoire discrète qui donne le rang du tirage au bout duquel  $B_1, \dots, B_r$  ont été tirées au moins une fois.

- a) Déterminer la loi, l'espérance, la variance de  $Y_1$ .  
*indication : dénombrer.*
- On fixe  $r$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ , on note  $W_i$  la variable aléatoire discrète représentant le nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois,  $i$  boules distinctes parmi les boules  $B_1, \dots, B_r$  soient sorties (ainsi,  $W_r = Y_r$ ). On pose  $X_1 = W_1$  et  $X_i = W_i - W_{i-1}$  si  $i \geq 2$ .
  - Déterminer la loi de  $X_i$  ainsi que son espérance.  
*indication : interpréter  $X_i$ .*
  - En déduire l'espérance de  $Y_n$ . Trouver un équivalent de  $E(Y_n)$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 38 (Centrale PSI 2023) [Solution]**

Soient  $N \in \mathbb{N}^*$  et une urne avec initialement  $N$  boules rouges. On tire successivement dans l'urne de la façon suivante : si on tire une boule rouge, on la remplace par une verte ; si on tire une boule verte, on la remet dans l'urne. On note  $X_p$  le nombre de boules rouges dans l'urne à l'issue du  $p^{\text{ème}}$  tirage. On pose  $X_0 = N$ . On note  $Y$  le rang où on enlève la dernière boule rouge ( $Y = 0$  si ce rang n'existe pas)

- Montrer, pour  $n \geq 0$  et  $k \geq 0$ ,  $P(X_{n+1} = k) = \frac{N-k}{N}P(X_n = k) + \frac{k+1}{N}P(X_n = k+1)$
- En déduire une relation entre  $E(X_{n+1})$  et  $E(X_n)$
- Donner  $E(X_n)$  en fonction de  $n$  et  $N$  et en déduire la valeur de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n \geq 1)$  et de  $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{E(X_n)}{N}$ .
- Montrer que  $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1)$ , puis en déduire la valeur de  $P(Y = 0)$ .

**Exercice 39 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]**

Une urne contient  $n$  jetons numérotés de 1 à  $n$ . On pioche une poignée de jetons de manière aléatoire (toutes les poignées, y compris la poignée vide sont tirées de façon équiprobables). Déterminer l'espérance de  $S$ , la somme des valeurs des jetons tirés.

*indication : ne pas chercher la loi de  $S$  mais la relier aux  $X_i$  tels que  $X_i = 1$  si le jeton  $i$  est tiré.*

**Exercice 40 (CCP PSI 2021) [Solution]**

On considère  $n$  lancers indépendants d'un dé équilibré. On note  $X_n$  la valeur obtenue au  $n^{\text{ème}}$  lancer.

1. Trouver la loi de  $X_n$  et sa fonction de répartition  $F$ .
2. On note  $Y_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ . Déterminer la loi et la fonction de répartition  $F_n$  de  $Y_n$ .
3. Étudier la convergence uniforme de  $(F_n)$ .
4. Mêmes questions avec  $Z_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ .

**Exercice 41 (CCP PC 2015) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{B}(n)$  et  $\mathcal{B}(p)$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ X & Y \end{pmatrix}$ . Quelle est la probabilité que  $A$  soit la matrice d'un projecteur non nul ?

**Exercice 42 (Mines-Télécom PSI 2024) [Solution]**

Soit  $X, Y$  des variables aléatoires à valeurs dans  $\{-1, 0, 1\}$  indépendantes et de même loi, telles que  $P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1)$ . On pose  $M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}$ .

Quelle est la probabilité pour que la matrice  $M$  soit diagonalisable ?

**Exercice 43 (Centrale PSI 2015) [Solution]**

Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes une loi  $\mathcal{B}(p)$ . On pose  $U = {}^t(X_1 \ \dots \ X_n)$  et  $M = U {}^t U$ .

1. Déterminer la loi suivie par  $\text{rg}(M)$ .
2. Exprimer, à l'aide de  $\text{Tr}(M)$ , la probabilité que  $M$  soit une matrice de projection.
3. Déterminer la probabilité que  $M$  soit la matrice de la projection orthogonale sur  $\text{Vect}\{ {}^t(1 \ \dots \ 1)\}$ .

**Exercice 44 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ; on dit que  $A$  vérifie  $(P)$  si  $\mathcal{X}_A = \prod_{i=1}^n (X - a_{i,i})$

1. Donner des exemples de matrices vérifiant  $(P)$
2.  $X_1, X_2, X_3$  sont trois variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$ .

Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & X_1 - X_2 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & 0 & 0 \\ X_2 - X_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Quelle est la probabilité que  $A$  vérifie  $(P)$  ?

## II Lois sans expérience

**Exercice 45 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soient  $\alpha \geq 0$  et  $p_k = e^{-2} \frac{4^k (1 + \alpha k)}{(2k)!}$ .

1. Soit  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(2)$ . Déterminer la loi de  $T = 1 + Y$ .
2. Déterminer  $\alpha$  pour qu'il existe une variable aléatoire discrète  $X$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $P(X = k) = p_k$ . Calculer  $E(X)$ .

**Exercice 46 (CCP PSI 2022) [Solution]**

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . On considère une variable aléatoire discrète  $X$  sur  $\llbracket 0, n \rrbracket$  telle que  $P(X = k) = \frac{a}{k+1} \binom{n}{k}$ .

1. Trouver  $\alpha$ , dépendant de  $k$  et  $n$ , tel que  $\binom{n}{k} = \alpha \binom{n-1}{k-1}$ .
2. En déduire la valeur de  $a$  pour laquelle on peut définir une telle variable aléatoire discrète  $X$ .
3. Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 47 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

Soient  $p \in ]0, 1[$  et  $p_k = p^2 k (1-p)^{k-1}$  pour  $k \in \mathbb{N}^*$ .

- Montrer qu'il existe une variable aléatoire discrète  $X$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $P(X = k) = p_k$
- Montrer l'existence et calculer la valeur de  $E(X - 1)$  et  $E((X - 1)(X - 2))$
- Montrer l'existence et calculer la valeur de  $E(X)$  et  $V(X)$ .

**Exercice 48 (Centrale PC 2015) [Solution]**

- Soit  $r > 0$ . Justifier qu'il existe une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $P(X = k) = r \int_0^1 t^{k-1} (1-t)^r dt$ .
- Calculer  $E(X)$  et  $V(X)$  si elles existent.

**Exercice 49 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et qu'il existe  $a > 0$  vérifiant  $P(X = n) = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}}$ .

- Vérifier qu'on peut bien définir une telle variable aléatoire discrète .
- On note  $Y$  une autre variable aléatoire discrète , indépendante de  $X$ , qui suit la même loi que  $X$  et on pose  $Z = X + Y$ .
  - Déterminer la loi de  $Z$ .
  - Déterminer  $E\left(\frac{1}{1+Z}\right)$  puis  $E\left(\frac{X}{1+Z}\right)$ .
- On note cette fois  $T = \min(X, Y)$ .
  - Déterminer  $P(X \leq n)$ .
  - En déduire la loi de  $T$ .

**Exercice 50 (CCINP PSI 2021) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , indépendantes et de même loi, qui admettent une variance et telles que  $Z = X + Y + 1$  suive  $\mathcal{G}(p)$

- Déterminer l'espérance de  $X$ .
- Déterminer la fonction génératrice de  $X$ .
- Déterminer la loi de  $X$

### III Espérance et théorème de transfert

**Exercice 51 [Solution]**

- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète suivant  $\mathcal{B}(n, p)$ ; on pose  $Y = \frac{1}{X+1}$ . Calculer  $E(Y)$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  et  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . On pose  $Z = (-1)^X$ . Déterminer la loi de  $Z$  et son espérance.

**Exercice 52 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . Calculer  $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$ .

**Exercice 53 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ .

- Soit  $Y = 1 + X^2$ . Déterminer la loi de  $Y$ .
- Calculer la probabilité de l'événement  $2X < Y$ .
- Calculer la probabilité que  $X$  soit paire.
- $X$  a-t-elle plus de chance d'être paire ou impaire ?

**Exercice 54 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]**

- 2 variables aléatoires discrètes indépendantes  $X$  et  $Y$  suivent  $\mathcal{G}(p)$ . Donner la loi de  $T = \min(X, Y)$ , son espérance et sa fonction génératrice.
- Montrer que  $\frac{1}{T(T+1)}$  admet une espérance et la calculer.

## IV Couple de variables

### Exercice 55 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit un dé équilibré à 10 faces numérotées de 1 à 10. On lance le dé jusqu'à obtenir un chiffre inférieur ou égal à 6. On note  $X$  le chiffre du dernier lancer.

1. Soit  $N$  le nombre de lancers obtenus. Déterminer la loi de  $N$ .
2. Pour tout  $(k, n) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \mathbb{N}^*$ , calculer  $P(X = k, N = n)$ .
3. Calculer  $P(X = k)$ . En déduire la loi de  $X$ .
4. Les variables  $X$  et  $N$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 56 (CCINP PSI 2022) [Solution]

On étudie succession de lancers d'une pièce équilibrée.  $X$  est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de la séquence « pile-face » ( $(X = k)$  si pile au lancer  $k$  et face au lancer  $k + 1$ ).  $Y$  est la variable aléatoire qui décrit le premier rang de « pile »

1. Donner la loi conjointe de  $(X, Y)$ .
2. En déduire la loi de  $X$ .
3. Calculer  $E(X)$ .

### Exercice 57 [Solution]

Soit  $N$  une variable aléatoire discrète telle que  $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ . Soit  $S$  la variable aléatoire discrète telle que  $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_{(N=i)} \hookrightarrow \mathcal{B}(i, \gamma)$ .

1. Déterminer  $S(\Omega)$
2. Déterminer la loi conjointe de  $S$  et  $N$ .
3. Prouver que  $S \hookrightarrow \mathcal{B}(m, r)$  avec  $m$  et  $r$  à préciser.

### Exercice 58 (Mines-Télécom PSI 2019) [Solution]

$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y_{(X=n)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

1. Donner la loi du couple  $(X, Y)$ .
2. Déterminer la loi de  $Y$
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

### Exercice 59 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$ .

1. On pose  $S = X + Y$ , trouver la loi de  $S$ .
2. Reconnaître la loi de  $X$  sachant  $(S = k)$ .
3. Soit  $Z$  une variable aléatoire discrète, mutuellement indépendante de  $X$  et  $Y$ , telle que  $Z(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P(Z > n + 1 | Z > n) = 1 - p$ , reconnaître  $1 + Z$ .
4. Calculer  $P(S = Z)$

### Exercice 60 (TPE-EIVP PSI 2019) [Solution]

Soient  $X$  et  $Y$  suivant  $\mathcal{G}(p)$  indépendantes. Déterminer la loi de  $\min(X, Y)$ .

### Exercice 61 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes avec  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ . On pose  $U = \max(X, Y)$  et  $V = \min(X, Y)$  et on note  $q = 1 - p$ .

1. Déterminer la loi du couple  $(U, V)$
2. Déterminer les lois de  $U$  et  $V$ .

### Exercice 62 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et  $p \in ]0, 1[$  tels que

$$P(X = k, Y = n) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de  $Y$ .
2. Montrer que  $\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k}$  pour  $|x| < 1$  et en déduire la loi de  $X$
3.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 63 (CCINP PSI 2023) [Solution]**

Soient  $\alpha, \beta$  deux réels strictement positifs,  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  telles que  $P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{e^{-\beta} \beta^i \alpha^j (1 - \alpha)^{i-j}}{j!(i-j)!} & \text{si } 0 \leq j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$

1. Déterminer les lois de  $X$  et  $Y$
2.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. On pose  $Z = X - Y$  ; déterminer la loi de  $Z$
4. Déterminer  $P(Y = j | Z = n)$  et conclure

**Exercice 64 [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes telles que :  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  et  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$ ,

$$P[(X = i) \cap (Y = j)] = \lambda \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

1. Déterminer la valeur de  $\lambda$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  et celle de  $Y$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. On pose  $Z = X - 1$ . Déterminer la loi de  $Z$ . En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$
4. Calculer  $E(XY)$  puis calculer  $E(2^{X-Y})$ .

**Exercice 65 [Solution]**

Soit  $a > 0$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$

1. Déterminer  $\lambda$  pour qu'il existe 2 variables aléatoires discrètes  $X$  et  $Y$  telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$  et, pour  $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ ,  $P(X = i, Y = j) = \lambda \times \frac{a^{i+j}}{i!j!}$
2. Déterminer la loi de  $X$  et la loi de  $Y$ .  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la loi de  $S = X + Y$ .

**Exercice 66 (AADN PSI 2015) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  vérifiant  $P(X = i, Y = j) = \frac{a}{2^{i+1} j!}$  où  $a > 0$ .

1. Déterminer  $a$ .
2. Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y$  ; sont-elles indépendantes ?
3. Vérifier que  $1 + X$  suit une loi géométrique ; en déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .
4. Déterminer  $P(X = Y)$  et en déduire la probabilité que  $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$  soit diagonalisable.

**Exercice 67 (CCINP PSI 2023) [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que  $P(X = i) = \frac{i}{2^{i+1}}$  pour  $i \geq 1$ . On considère une urne qui contient  $X$  boules numérotées de 1 à  $X$  ; on tire une boule au hasard dans cette urne et on note  $Y$  le numéro de la boule tirée.

1. Vérifier qu'un telle variable aléatoire  $X$  existe.
2. Calculer  $E(X)$ .
3. Donner la loi conjointe de  $X$  et  $Y$ .
4. Déterminer la loi de  $Y$  puis son espérance.

**Exercice 68 (CCP PSI 2018) [Solution]**

Un élément chimique émet des électrons. On note  $N$  la variable aléatoire discrète égale au nombre d'électrons émis sur une période ; on suppose que  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . Un électron émis est efficace avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$  ; on note  $X$  le nombre d'électrons efficaces émis.

1. Calculer  $P(X = i | N = j)$  pour  $j \in \mathbb{N}$ .
2. Déterminer la loi conjointe de  $X$  et  $N$ .
3. Déterminer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
4. On note  $Y$  le nombre d'électrons inefficaces. Calculer  $\text{Cov}(X, Y)$ .

**Exercice 69 [Solution]**

Une pièce amène « pile » avec une probabilité  $p \in ]0, 1[$ . Une personne lance cette pièce jusqu'à obtenir pile. On désigne par  $N$  le nombre de lancers nécessaires. Si pile est apparu au  $n^{\text{ème}}$  lancer (ie si l'événement  $(N = n)$  est réalisé) alors la personne relance la pièce  $n$  fois et on appelle  $X$  le nombre de piles obtenus au cours de ces  $n$  nouveaux lancers

1. Préciser la loi de  $X_{(N=n)}$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(X, N)$ .
3. Déterminer la loi de  $X$  (séparer les cas  $X = 0$  et  $X = k$  où  $k \geq 1$ ))
4. Calculer  $E(X)$ .

**Exercice 70 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]**

Une pièce amène pile avec la probabilité  $p \in ]0, 1[$ . On lance cette pièce une infinité de fois. On appelle « série » toute succession de lancers donnant le même côté de la pièce, succession interrompue par l'obtention de l'autre côté de la pièce. Soit  $X_1$  (resp.  $X_2$ ) la variable aléatoire discrète égale à la longueur de la première série (resp. celle de la deuxième). Ainsi, par exemple, si on a obtenu : PPPFFP etc... alors  $X_1 = 3$  et  $X_2 = 2$

1. a) Déterminer la loi de  $X_1$ .  
b) Prouver que  $E(X_1)$  existe, calculer  $E(X_1)$  et vérifier  $E(X_1) \geq 2$ .
2. a) Déterminer la loi du couple  $(X_1, X_2)$   
b) En déduire la loi de  $X_2$   
c) Calculer  $E(X_2)$  puis calculer  $V(X_2)$
3. Les variables  $X_1$  et  $X_2$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 71 [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  et soit  $Y$  définie par  $\begin{cases} Y = 0 & \text{si } X = 0 \\ Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p) & \text{si } X = n \geq 1 \end{cases}$

1. Déterminer  $P_{(X=0)}(Y = 0)$  puis  $P_{(X=0)}(Y = i)$  pour  $i \geq 1$ .  
Calculer  $P_{(X=n)}(Y = k)$  pour  $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ . En déduire la loi de  $Y$ .

**Exercice 72 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]**

$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(a)$  sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes.

1. Calculer l'espérance et la variance de  $U$  qui vaut 0 si  $X = 0$  et  $Y$  si  $X = 1$ .
2.  $Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  est indépendante de  $X$  et  $Y$ . Calculer l'espérance et la variance de  $V$  qui vaut  $Y$  si  $X = 0$  et  $Z$  si  $X = 1$ .

**Exercice 73 [Solution]**

Soient  $n$  boîtes telles que, pour  $1 \leq k \leq n$ , la boîte  $B_k$  contient  $k$  jetons numérotés de 1 à  $k$ . On choisit au hasard une boîte et un jeton dans cette boîte. On désigne par  $X$  (resp.  $Y$ ) le numéro de la boîte choisie (resp. le numéro du jeton tiré).

1. Donner la loi de  $X$ .
2. Déterminer la loi du couple  $(X, Y)$ . Retrouver alors la valeur de  $P(X = k)$ .
3. Déterminer la loi de  $Y$  puis calculer  $E(Y)$ .
4. Montrer que  $P(X = Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X = Y)$ .

**Exercice 74 (CCINP PSI 2022) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{P}(\lambda)$  et  $\mathcal{P}(\mu)$ . On pose  $Z = X + Y$ .

1. Déterminer la loi de  $Z$ .
2. Déterminer la loi de  $X$  sachant  $(Z = n)$ .

**Exercice 75 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$ .

1. Déterminer la loi de  $D = |X - Y|$
2. On pose  $T = \max(X, Y)$  et  $U = \min(X, Y)$ ; exprimer  $T + U$ ,  $T - U$  et  $TU$  en fonction de  $X$  et  $Y$ .
3. Déterminer  $\text{Cov}(T, U)$
4.  $T$  et  $U$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 76 [Solution]**

Soit  $X$  et  $Y$  des variables aléatoires discrètes indépendantes telles que  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ . On pose  $V = |X - Y|$  et  $M = \min(X, Y)$

1. On suppose dans cette question que  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ 
  - a) Déterminer la loi du couple  $(V, M)$

- b) En déduire les lois de  $V$  et  $M$ .  
 $V$  et  $M$  sont-elles indépendantes ?
2. On suppose maintenant que  $X$  et  $Y$  suivent une même loi et que  $V$  et  $M$  sont indépendantes. On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n = P(X = n) = P(Y = n)$  et on suppose  $p_n > 0$ .
- Calculer  $P[(V = 1) \cap (M = n)]$  et  $P[(V = 0) \cap (M = n)]$  en fonction des  $(p_i)_{i \geq 1}$ .
  - Déterminer  $p_n$ .
3. Quelle conclusion peut-on tirer ?

**Exercice 77 (Centrale PSI 2019) [Solution]**

On dit qu'une variable aléatoire discrète est symétrique si  $X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$  et  $\forall n \in \mathbb{Z}, P(X = n) = P(X = -n)$

- Montrer que si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et symétriques alors  $X + Y$  est symétrique.
- Généraliser au cas de  $n$  variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.

## V Variances et covariances

**Exercice 78 [Solution]**

Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 10. Pour  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$  la proportion de jetons portant le numéro  $i$  est  $p_i$ , où  $p_i \in ]0, 1[$ . On tire successivement avec remise  $n$  jetons dans cette urne et  $N_i$  désigne le nombre de jetons obtenus portant le numéro  $i$

- Déterminer la loi de  $N_i$  pour  $i \in \llbracket 1, 10 \rrbracket$ .
- Soit  $(i, j) \in \llbracket 1, 10 \rrbracket^2$  avec  $i \neq j$ . On pose  $Z_{i,j} = N_i + N_j$ . Que représente  $Z_{i,j}$  ? En déduire la loi de  $Z_{i,j}$  puis calculer  $\text{Cov}(N_i, N_j)$  pour  $i \neq j$ .

**Exercice 79 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  suivant  $\mathcal{B}(p)$  et  $\mathcal{B}(q)$ . On suppose  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

- Montrer que  $P(X = 1, Y = 1) = P(X = 1)P(Y = 1)$ .
- Montrer que  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.

**Exercice 80 [Solution]**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent une loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $S = X + Y$  et  $D = X - Y$

- Calculer  $\text{Cov}(S, D)$ .  $S$  et  $D$  sont-elles indépendantes ?
- a) Préciser  $S(\Omega)$   
b) Calculer  $P(S = k)$ .

**Exercice 81 (Mines-Ponts PC 2015) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$ .

- Donner la loi  $D = |X - Y|$ .
- On pose  $T = \max(X, Y)$  et  $U = \min(X, Y)$ . Exprimer  $T + U$ ,  $T - U$  et  $UT$  en fonction de  $X$  et  $Y$  et en déduire  $\text{Cov}(T, U)$ .

**Exercice 82 (Mines-Télécom PSI 2021) [Solution]**

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{G}(p)$ . On pose  $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$ .

- Montrer que  $P(X = Y) = \frac{p}{2 - p}$  ; en déduire la probabilité que  $M$  soit inversible.
- On note  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les valeurs propres de  $M$ . Déterminer la covariance de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ; sont-elles indépendantes ?

**Exercice 83 (CCP PSI 2018) [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète ; on dit que  $X$  vérifie la propriété  $D$  si  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , il existe des variables aléatoires discrètes  $X_1, \dots, X_n$ , mutuellement indépendantes et de même loi, telle que  $X = X_1 + \dots + X_n$ .

- Montrer que si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  alors  $X$  vérifie  $D$ .
- Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) \in [a, b]$  ( $a < b$ )
  - Montrer que  $V(X) \leq (b - a)^2$ .  
*indication : commencer par vérifier que  $a - b \leq X - E(X) \leq b - a$*
  - Montrer que si  $X$  vérifie  $D$  alors  $V(X_i) \leq \frac{(b - a)^2}{n^2}$  (avec  $X_1, \dots, X_n$  données par  $D$ )
  - Que peut-on en déduire pour  $X$  ?  
*indication : montrer que si  $V(X) = 0$  alors  $X$  est constante presque sûrement*

**Exercice 84 (AADN PSI 2015) [Solution]**

Soient  $\mathcal{E}$  l'ensemble des variables aléatoires centrées admettant une variance et  $V_0 = \inf\{V(X), X \in \mathcal{E}\}$ .

1. Justifier l'existence de  $V_0$ .
2. On suppose que  $(X_1, X_2) \in \mathcal{E}^2$  et  $\frac{X_1 + X_2}{2} \in \mathcal{E}$ . Montrer que si  $V(X_1) = V(X_2) = V_0$  alors  $X_1 = X_2$  presque sûrement.  
*indication : commencer par montrer que  $V((X_1 + X_2)/2) = V_0$  aussi.*

**Exercice 85 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]**

1. Soient  $f$  et  $g$  deux applications croissantes de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $X$  une variable aléatoire discrète admettant un moment d'ordre 2. Montrer que  $\text{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$ ; on pourra introduire une variable  $Y$ , indépendante de  $X$ , de même loi que  $X$  et montrer  $(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y)) \geq 0$ .

2. Soient  $(a_n)$  et  $(b_n)$  deux suites croissantes. Montrer que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i \right)$

## VI Inégalités

**Exercice 86 (Mines-Télécom série 2 PSI 2023) [Solution]**

On effectue  $n$  lancers de deux dés  $D_1$  et  $D_2$ . Une victoire correspond à un lancer où la valeur de  $D_1$  est strictement supérieure à la valeur de  $D_2$ . On note  $X$  le nombre de victoire au cours des  $n$  lancers.

1. Donner la loi de  $X$
2. Espérance et variance de  $X$  ?
3. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev
4. On note  $p_n = P\left(0.9 \leq \frac{X}{E(X)} \leq 1.1\right)$ . Déterminer une majoration de  $p_n$ .

**Exercice 87 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $X$  suit une loi géométrique de paramètre  $1/n$ . Montrer que :  $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$ ;  $P(|X - n| \geq n) \leq 1 - \frac{1}{n}$ ;  
 $P(X \geq 2n) \leq 1 - \frac{1}{n}$ .

**Exercice 88 [Solution]**

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec  $X_n$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p_n$ . Montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$ .

**Exercice 89 (CCINP PSI 2024) [Solution]**

Soit  $(X_i)_{i \geq 1}$  une suite de variables aléatoires discr es indépendantes telles que  $X_i \sim \mathcal{B}(p_i)$ . On pose  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$  et

$q_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$  et on suppose  $\lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = p$

1. Trouver l'espérance et la variance de  $\frac{1}{n} S_n$
2. Soit  $\varepsilon > 0$ , montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - q_n\right| > \varepsilon\right) = 0$
3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - p\right| > \varepsilon\right) = 0$

**Exercice 90 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

Soient  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discr es mutuellement indépendantes suivant  $\mathcal{B}(p)$ ,  $Y_i = X_i + X_{i+1}$  et  $M_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \dots + Y_n)$ .

1. Citer la loi faible des grands nombres.
2. Les  $Y_i$  sont elles indépendantes ?
3. Calculer  $E(M_n)$  et  $V(M_n)$ .
4. En déduire  $P(|M_n - 2p| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  si  $\varepsilon > 0$ .

### Exercice 91 (Centrale PSI 2021) [Solution]

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant  $\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ . On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

1. Justifier l'existence et calculer  $E\left(e^{x(S_n - \frac{n}{2})}\right)$ , où  $x \in \mathbb{R}^+$ .
2. a) Soient  $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$  et  $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$ . Justifier que  $f$  admet sur  $\mathbb{R}^{+*}$  un maximum  $M_\alpha > 0$ .
- b) Montrer que  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) \leq 2e^{-nM_\alpha}$

### Exercice 92 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes de loi  $\mathcal{B}(p)$ ,  $Y_n = U_n U_{n+1}$  et  $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ .

1. Donner la loi de  $Y_n$ .
2. Pour quels  $(n, m)$  les variables  $Y_n$  et  $Y_m$  sont-elles indépendantes ?
3. Calculer  $E(Y_n Y_m)$  et  $E\left(\frac{S_n}{n}\right)$ .
4. Calculer  $V(S_n)$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right) = 0$

### Exercice 93 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

1.  $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ ; montrer que, pour  $u \in \mathbb{R}$ ,  $e^{uN}$  admet une espérance et la calculer.
2. On pose  $h(x) = (1+x) \ln(1+x) - x$ . Montrer que  $\inf_{u>0} E\left(e^{u(N-(1+y)\lambda)}\right) = e^{-\lambda h(y)}$ .
3. On fixe  $y > 0$ ; montrer que  $P(N \geq (1+y)\lambda) \leq e^{-\lambda h(y)}$ .

### Exercice 94 (Centrale PSI 2017) [Solution]

Soit une famille  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes, d'espérance nulle, suivant la même loi et prenant un nombre fini de valeurs.

1. Montrer que  $\forall \varepsilon > 0, h_+(\varepsilon) = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} ((t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1}))) \in \mathbb{R}^{+*} \cup \{+\infty\}$
2. On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ; montrer que  $P\left(\frac{1}{n}S_n \geq \varepsilon\right) \leq e^{-nh_+(\varepsilon)}$   
puis que  $\forall (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, P(S_n \geq n\varepsilon)P\left(\sum_{k=1}^m X_{n+k} \geq m\varepsilon\right) \leq P(S_{n+m} \geq (n+m)\varepsilon)$ .

## VII Fonctions génératrices

### Exercice 95 (CCINP PSI 2024) [Solution]

On dispose d'une urne contenant  $n$  boules blanches et  $n$  boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante : si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne; si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne. On note la variable aléatoire  $X_p$  qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne au  $p^{\text{ème}}$  tirage, pour tout  $p$  entier naturel non nul.

1. Donner la loi de  $X_1$  et  $X_2$ .
2. Pour tout  $k \geq n+1$ , calculer  $P(X_p = k)$ .
3. Donner une relation entre  $P(X_{p+1} = k)$ ,  $P(X_p = k+1)$ ,  $P(X_p = k)$ .
4. Justifier que la fonction génératrice  $G_p$  est polynomiale.
5. On admet la relation  $G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n}G'_p(t)$ . Donner une relation entre  $E(X_{p+1})$  et  $E(X_p)$ . Calculer  $E(X_p)$ . Calculer sa limite lorsque  $p$  tend vers  $+\infty$ . Interpréter.

### Exercice 96 (Centrale PSI 2024) [Solution]

On considère une urne contenant  $N$  boules numérotées de 1 à  $N$  dans laquelle on effectue des tirages avec remise. On note  $(T_n = k)$  l'événement « au cours des  $n$  tirages on a obtenu exactement  $k$  boules distinctes ».

1. Donner  $P(T_n = 1)$ ,  $P(T_n = 2)$  et  $P(T_n = n)$
2. Établir une relation entre  $P(T_{n+1} = k+1)$ ,  $P(T_n = k)$  et  $P(T_n = k+1)$
3. En déduire l'espérance de  $T_n$ .  
*indication : utiliser la fonction génératrice.*

**Exercice 97 (CCP PSI 2015) [Solution]**

Soit  $a$  un réel strictement positif. Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que : pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}$

1. Déterminer  $a$ .
2.  $X$  admet-elle une espérance, une variance ?
3. Expliciter la série génératrice de  $X$ .

**Exercice 98 (TPE-EIVP PSI 2015) [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  telle que  $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = \frac{k-1}{2^k}$ .

1. Vérifier par le calcul que  $\sum_{k \geq 1} P(X = k) = 1$ .
2. Donner la fonction génératrice de  $X$ . Quel est son rayon de convergence ?
3.  $X$  admet-elle une espérance finie ? Si oui, quelle est-elle ?

**Exercice 99 (CCP PSI 2024) [Solution]**

1.  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ . Montrer que, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ .
2. En déduire un équivalent de  $\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .
3. Que valent  $G_X(1)$  et  $G_X(-1)$  ? En déduire la probabilité que  $X$  soit paire.
4.  $Y$ , indépendante de  $X$  suit une loi uniforme sur  $\{1, 2\}$ . Calculer la probabilité que  $XY$  soit pair.

**Exercice 100 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]**

1. Donner le DSE de  $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ .
2. À quelle condition sur  $r$  peut-on définir une variable aléatoire discrète  $X$  telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $P(X = n) = \frac{(2n)!r}{2^{3n}(n!)^2}$  ?
3. Lorsque cette condition est réalisée, calculer l'espérance et la variance de  $X$ .

**Exercice 101 [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète à valeurs dans  $\mathbb{N}$  de fonction génératrice  $G_X$ . Déterminer la fonction génératrice de  $2X$  et de  $X+1$ .

**Exercice 102 [Solution]**

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète dont la fonction génératrice est :  $G_X(t) = \frac{t}{2-t^2}$ . Déterminer les lois de  $X$  et de  $Y = X/2$ .

**Exercice 103 (Mines-Télécom PSI 2022) [Solution]**

Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires discrètes indépendantes et  $S = X + Y$

1. Donner la fonction génératrice  $G_S$  de  $S$  en fonction de  $G_X$  et  $G_Y$
2. Si  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \sim \mathcal{B}(m, p)$ , donner la loi de  $S$
3. Même question avec  $X \sim Y \sim \mathcal{G}(p)$

**Exercice 104 (CCINP PSI 2019) [Solution]**

$X$  et  $Y$  sont 2 variables aléatoires discrètes indépendantes de même loi. On suppose que  $Z = 1 + X + Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

1. Montrer que  $X$  admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de  $p$ .
2. Calculer  $G_X(t)$  et en déduire la loi de  $X$ .

**Exercice 105 (ENSAM PSI 2015) [Solution]**

On effectue  $n$  tirages indépendants dans une urne contenant  $n$  boules numérotées de 1 à  $n$ . On note  $X$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de 1 tirés.

1. Exprimer la loi de  $X$ , son espérance et sa variance.
2. Soit  $k$  un entier strictement positif. Exprimer la limite de  $P(X = k)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
3. On pose  $q(n)$  la probabilité que  $X$  soit pair et  $p(n)$  celle que  $X$  soit impair. Exprimer  $p(n) + q(n)$  et  $p(n) - q(n)$ . En déduire la limite de  $p(n)$  quand  $n$  tend vers l'infini.
4. Soit  $Y$  la variable aléatoire discrète égale au nombre de 2 tirés.  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes ?

**Exercice 106** [Solution]

Quelle est la loi de la somme de deux variables aléatoires discrètes indépendantes de loi binomiale de paramètres  $(n, p)$  et  $(m, p)$ ? (utiliser la fonction génératrice)

En déduire la valeur de  $\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$ .

**Exercice 107** [Solution]

Dans une famille donnée, on appelle  $F$  et  $X$ , les variables aléatoires discrètes à valeurs dans  $\mathbb{N}$  représentant respectivement le nombre de filles et le nombre d'enfants, de la famille. On suppose qu'à chaque naissance dans une famille, il est équiprobable d'avoir une fille ou un garçon, de manière indépendante des autres naissances.

1. Démontrer que, si  $G_F$  et  $G_X$  sont les fonctions génératrices de  $F$  et  $X$ , alors  $G_F(t) = G_X\left(\frac{t+1}{2}\right)$
2. Donner la loi de  $F$  dans les cas suivants :  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  puis  $X + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

**Exercice 108** (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = \mathbb{N}$ . Montrer que si  $r \in ]0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $P(X \geq n) \leq \frac{1 - G_X(r)}{1 - r^n}$  puis étudier le cas d'égalité.

indication :  $G_X(1) = 1$ .

**Exercice 109** (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

Soit  $X$  une variable aléatoire discrète telle que  $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ .

1. Calculer  $G_X^{(k)}(1)$  en fonction de  $u_k(X) = E\left(\prod_{p=0}^{k-1}(X - p)\right)$ .
2. Montrer que  $P(X = j) = \frac{1}{j!} \sum_{k=j}^n (-1)^{j-k} \frac{u_k(X)}{(k-j)!}$ .

**Exercice 110** [Solution]

On lance un dé équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. On appelle succès le fait d'obtenir un 6.

1. On note  $T_n$  le nombre de lancers qu'il faut pour obtenir un  $n^{\text{ème}}$  succès. Déterminer la loi de  $T_n$ , sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.
2. On note  $Y_n$  le nombre d'échecs précédant le  $n^{\text{ème}}$  succès. Déterminer la loi de  $Y_n$ , sa fonction génératrice, son espérance et sa variance.

## Solutions

**Exercice 1** [sujet] 1.  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ ;  $X(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$

2. Si  $Z_i$  est le numéro de la boule tirée au  $i^{\text{ème}}$  tirage,  $(Y \geq k) = \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 2\}) \right] \cup \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 3\}) \right] \cup \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{2, 3\}) \right]$  mais les réunions ne sont pas disjointes.  $P\left(\left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 2\}) \right] \cup \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 3\}) \right]\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (Z_i = 1)\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ . On procède de même pour la seconde réunion avec cette fois  $\left(\left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 2\}) \right] \cup \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{1, 3\}) \right]\right) \cap \left[ \bigcap_{i \leq k-1} (Z_i \in \{2, 3\}) \right] = \left[ \bigcap_{i=1}^{k-1} (Z_i = 2) \right] \cup \left[ \bigcap_{i=1}^{k-1} (Z_i = 3) \right]$ . Au final  $P(Y \geq k) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$  si  $k \geq 2$  et  $P(Y \geq 1) = 1$ . On a ensuite  $P(Y = k) = P(Y \geq k) - P(Y \geq k+1)$
3.  $E(Y) = \sum_{k \geq 1} P(T \geq k) = 1 + 3 \sum_{k \geq 2} \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right] = \frac{11}{2}$

**Exercice 2** [sujet] 1.  $F_X(k) = P\left(\bigcap_{i=1}^5 (T_i \leq k)\right)$  où  $T_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{6}\right)$  est le temps d'attente du premier 6 pour le dé  $i$ .

On a donc, par indépendance mutuelle,  $F_X(k) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^k\right)^5$  puis  $P(X = k) = F_X(k) - F_X(k-1)$  pour  $k \geq 1$ .

2. Calcul pénible en développant tout avec la formule du binôme

**Exercice 3** [sujet] 1.  $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$

2. La probabilité que toutes les boules tombent dans l'urne 1 est  $\frac{1}{3^n}$  donc  $P(X = 2) = 3 \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n-1}}$ . La probabilité que toutes les boules se répartissent dans les urnes 1 et 2 est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$  donc celle qu'en plus aucune des deux urnes 1 et 2 ne reste vide est  $\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n}$  puis  $P(X = 1) = 3 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} \right]$ . Enfin,  $P(X = 0) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2)$
3.  $E(X) = 3 \left[ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{2}{3^n} \right] + 2 \frac{1}{3^{n-1}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$  ce qui est normal car plus le nombre de boules est grand, plus la probabilité que toutes les urnes se remplissent est grande

**Exercice 4** [sujet] 1.  $P(M_n \leq k) = P\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i \leq k)\right) \stackrel{\text{indép}}{=} \prod_{i=1}^n P(X_i \leq k) = \left(\frac{k}{N}\right)^n$  puis  $P(M_n = k) = P(M_n \leq k) - P(M_n \leq k-1) = \left(\frac{k}{N}\right)^n - \left(\frac{k-1}{N}\right)^n$

2. a)  $E(M_n) = \sum_{k=1}^N k(P(M_n > k-1) - P(M_n > k)) = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)P(M_n > j) - \sum_{k=0}^N kP(M_n > k) = \sum_{k=0}^{N-1} P(M_n > k)$   
 (le dernier terme de la somme de droite est nul).  $P(M_n > k) = 1 - \left(\frac{k}{N}\right)^n$  donc  $E(M_n) = N - \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{k}{N}\right)^n$

- b)  $\lim E(M_n) = N$  : plus on fait de tirages, plus on augmente les chances d'avoir la boule  $N$
3. a)  $E(M_n(M_n-1)) \stackrel{\text{transf}}{=} \sum_{k=1}^N k(k-1)(P(M_n > k-1) - P(M_n > k)) = \sum_{j=0}^{N-1} j(j+1)P(M_n > j) - \sum_{k=1}^N k(k-1)P(M_n > k) = 2 \sum_{k=1}^{N-1} P(M_n > k)$  puis  $V(M_n) = E(M_n(M_n-1)) + E(M_n) - E(M_n)^2 = N(N-1) - 2 \sum_{k=1}^{N-1} k \left(\frac{k}{N}\right)^k + E(M_n) - E(M_n)^2$
- b)  $\lim V_n = N(N-1) + N - N^2 = 0$  : la dispersion des résultats tend vers 0 puisqu'on a presque toujours la même valeur

**Exercice 5** [sujet] 1. Comme il n'y a que deux résultats possibles, ça ne peut être qu'une seule personne qui a un résultat différent des autres. Le lancer de chaque personne est une expérience de Bernoulli, indépendante des autres ; on cherche la probabilité d'avoir exactement 1 pile ou 1 face ( $n-1$  piles) donc  $p_n = \binom{n}{1} \frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1} \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$

2. Chaque partie des  $n$  joueurs est une expérience de Bernoulli de paramètre  $p_n$  et  $X$  le temps d'attente du premier succès donc  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_n)$

**Exercice 6** [sujet] 1.  $(Y > k) = (X_1 > k, X_2 > k)$  donc  $P(Y > k) = P(X_1 \geq k+1)^2 = \left( \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{i-1} \right)^2 = (1-p)^{2k}$  puis  $F_Y(k) = P(Y \leq k) = 1 - P(Y > k+1)$

2.  $P(Y = k) = P(Y > k-1) - P(Y > k)$  donc  $Y \hookrightarrow \mathcal{G}((1-p)^2)$

3.  $Z = Y + X_3$  donc  $E(Z) = E(Y) + E(X_3) = \frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{p}$

**Exercice 7** [sujet] 1.  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  puis cours

2.  $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$

3.  $(Z = 0)$  est l'événement « avoir 2 échecs consécutifs » donc  $P(Z = 0) = q^{2n}$ .

$(Z = 1) \stackrel{\text{incomp}}{=} (X = 1, Y = 0) \cup (X = 0, Y = 1)$  puis  $P(X = 1, Y = 0) = npq^{n-1} \times q^{n-1}$  et  $P(X = 0, Y = 1) = q^n \times npq^{n-1}$

4.  $P(Y = h|X = k) = \binom{n-k}{h} p^h q^{n-k-h}$  pour  $0 \leq h \leq n-k$

5. relation facile puis  $P(Z = j) = \sum_{k=0}^j P(Y = j-k|X = k)P(X = k) \stackrel{\text{rel}}{=} \binom{n}{j} p^j \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} q^{2n-j-k} = \binom{n}{j} [p(1+q)]^j (1-q^2)^{n-j}$  donc  $Z \sim \mathcal{B}(n, q^2)$

**Exercice 8** [sujet] 1.  $Y(\Omega) \subset [2, +\infty] \cap \mathbb{N}$  et pour  $k \geq 2$ ,  $(Y = k)$  si on tire le même jeton qu'au premier tirage (proba  $1/3$ ) aux tirages  $2, \dots, k-1$  et un autre jeton (proba  $2/3$ ) au tirage  $k$ . Par indépendance mutuelle des tirages, on a  $P(Y = k) = \frac{1}{3^{k-2}} \frac{2}{3}$

2.  $Y - 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right)$  donc  $E(Y) = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$  et  $V(Y) = \frac{1-2/3}{(2/3)^2} = \frac{3}{4}$

3. si  $k > h$ ,  $P(Y = k, Z = h) = P(Z = h|Y = k)P(Y = k)$  et si  $(Y = k)$  est réalisé, on aura  $(Z = h)$  si et seulement si on tire un des deux jetons tirés au cours des tirages  $k+1, \dots, h-1$  (proba  $2/3$ ) et le dernier jeton (proba  $1/3$ ) au tirage  $k$  donc  $P(Z = h|Y = k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{h-k-1} \frac{1}{3}$  puis  $P(Y = k, Z = h) = \frac{1}{3^{k-1}} \left(\frac{2}{3}\right)^{h-k}$

4. pour  $h \geq 3$ , on a  $P(Z = h) = \sum_{k=2}^{h-1} P(Y = k, Z = h) = \frac{2^{h-1} - 2}{3^{h-1}}$  puis  $E(Z) = \frac{11}{2}$

**Exercice 9** [sujet] 1.  $(X = k, Y = h) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } h > k \\ F_1 \cap \dots \cap F_{h-1} \cap P_h \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1} & \text{si } h \leq k \end{cases}$  donc  $P(X = k, Y = h) = \begin{cases} 0 & \text{si } h > k \\ 2^{-(k+1)} & \text{si } h \leq k \end{cases}$

2.  $P(X = k) = \sum_{h=1}^k P(X = k, Y = h) = \frac{k}{2^{k+1}}$

3.  $E(X) = \sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{2^{k+1}} = 3$ .

**Exercice 10** [sujet] 1. On a  $X(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $(X = n)$  est réalisé si et seulement si on obtient « pile » au lancer  $n+2$  et un autre pile lors des  $(n+1)$  premiers lancers (donc  $n+1$  choix). On a donc  $P(X = n) = (n+1)p^2(1-p)^n = \frac{n+1}{2^{n+2}}$

2.  $nP(X = n) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$  donc  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2^{n+2}} = 2$

**Exercice 11** [sujet] On a  $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et si on note  $S_1, E_1$  les événements succès et échec au premier lancer, on a  $P(X = n) = P(X = n|E_1)P(E_1) + P(X = n|S_1)P(S_1)$  puis  $P(X = n|E_1) = P(X = n-1)$  (après un échec, c'est comme si on recommençait l'expérience) et  $P(X = n|S_1) = P(X = n-2)P(E_2)$  si  $n \geq 4$  car après un succès, il faut un échec pour ne pas gagner au lancer 2. Si on note  $u_n = P(X = n)$ , on a  $u_n = (1-p)u_{n-1} + p(1-p)u_{n-2}$  pour  $n \geq 4$  avec  $u_2 = p^2$  et  $u_3 = (1-p)p^2$ . On en déduit  $u_n = \frac{p^2}{\sqrt{\Delta}} \left[ \left( \frac{1-p+\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1} - \left( \frac{1-p-\sqrt{\Delta}}{2} \right)^{n-1} \right]$  avec  $\Delta = (1-p)(1+3p)$ .

**Exercice 12** [sujet] 1. si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$  et en dérivant  $r-1$  fois,  $\frac{(r-1)!}{(1-x)^r} = \sum_{n \geq r-1} n(n-1)\dots(n-r+2)x^{n-r+1} \stackrel{k=n-r+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+r-1)!}{k!} x^k$ .

2.  $p_k \geq 0$  et  $\sum_{k \geq 0} p_k = p^r \frac{1}{(1-q)^r} = 1$

3. on a  $X = k$  si on a effectué  $k+r$  lancers, le dernier ayant donné un pile; au cours des  $k+r-1$  premiers lancers,  $k$  ont donné face (et les autres pile), il y a  $\binom{k+r-1}{k}$  façon de choisir les numéros des lancers qui ont donné face, la probabilité de chaque événement de ce type est indépendante de l'ordre dans lequel arrive les piles/faces (par indépendance des lancers) donc  $P(X = k) = \binom{k+r-1}{k} P(F_1 \cap \dots \cap F_k \cap P_{k+1} \cap \dots \cap P_{k+r}) = p_k$

**Exercice 13** [sujet] 1.  $P(X = n) = \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)!}$

2.  $E(X) = \sum_{n \geq 1} n(n+1) - (n+1) + 1(n+1)! = e - (e-1) + (e-1-1)$ ; même méthode pour  $V(X)$ .

**Exercice 14** [sujet] 1.  $X_{N=n} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  donc  $P(X = k, N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2. On en déduit  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

**Exercice 15** [sujet] 1.  $P(N = n, M = k) = P(M = k|N = n)P(N = n)$  et  $P(M = k|N = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On en déduit  $P(M = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{a^n e^{-a}}{n!} = e^{-ap} \frac{(ap)^k}{k!}$  donc  $M \sim \mathcal{P}(ap)$  et  $E(M) = ap$

2. On trouve de même que  $N - M \sim \mathcal{P}(a(1-p))$  puis  $P(M = i, N - M = j) = P(M = i, N = i + j) = \binom{i+j}{i} p^i (1-p)^j = P(M = i)P(N - M = j)$  donc indép

**Exercice 16** [sujet] 1. On note  $p = \frac{3}{10}$  et  $\lambda = 200$ .  $S_{(X=n)} \sim \mathcal{B}(n, p)$ , ie  $P(S = k|X = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$

2.  $P(S = k) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(S = k|X = n)P(X = n) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \stackrel{h=n-k}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} \frac{p^k (1-p)^h}{k! h!} e^{-\lambda} \lambda^{h+k} = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^k}{k!}$  donc  $S \sim \mathcal{P}(\lambda p)$

3. De même,  $A \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$

4.  $P(A = h, S = k) = P(X - S = h, S = k) = P(S = k, X = h+k) = \binom{h+k}{k} p^k (1-p)^h e^{-\lambda} \frac{\lambda^{h+k}}{(h+k)!} = P(A = h)P(S = k)$  donc  $A$  et  $S$  sont indép

**Exercice 17** [sujet] 1.  $P(X = k|N = n) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^k \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^{n-k}$  si  $k \leq n$ ; 0 sinon.

2.  $P(X = k) = \sum_{n \geq k} P(X = k|N = n)$  donc  $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)$ .

**Exercice 18** [sujet] 1.  $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

2.  $(Y = 0) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (X = 2i)$  donc  $P(Y = 0) = \frac{1}{2-p}$

3. Si  $i \geq 1$ ,  $P(Y = i) = P(X = 2i+1) = p(1-p)^{2i}$  et  $E(Y) = \frac{1-p}{(p(2-p))^2}$

**Exercice 19** [sujet] 1.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{a}{a+b}\right)$

2.  $Y(\Omega) = [\![1, n]\!]$ ;  $P(Y = k) = P(X = 0, Y = k) + P(X = k) = \frac{1}{n}P(X = 0) + P(X = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n + \binom{n}{k}\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}$ . On en déduit  $E(Y) = E(X) + \frac{1}{n}P(X = 0)\sum_{k=1}^n k = np(1-p) + \frac{n+1}{2}\left(\frac{b}{a+b}\right)^n$ .

**Exercice 20** [sujet] 1.  $P(\text{gagner}) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(2n) = \frac{1}{3}$

2.  $G(\Omega) \subset \mathbb{Z}$ ;  $P(G = 2k) = p(2k)$  et  $P(G = -(2k+1)) = p(2k+1)$  si  $k \in \mathbb{N}$ .  $E(G) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2kp(2k) - \sum_{k=0}^{+\infty} (2k+1)p(2k+1) = \sum_{n \geq 1} (-1)^n np(n) = \frac{-2}{9}$ ; calcul similaire pour  $V(G)$ .

**Exercice 21** [sujet] 1.  $P(X_1 = i) = \frac{2i}{r(r+1)}$ ; il y a  $\frac{r(r+1)}{2}$  boules dans l'urne.

2. a)  $P(X_{n+1} = r | X_n = r) = 1$  car toutes les boules seront numérotées  $r$  si on en tire une avec ce numéro au rang  $n$ ; si  $(X_n < r)$  est réalisé alors  $r$  boules portent le numéro  $r$  pour le  $n+1$  tirage et  $P(X_{n+1} = r | X_n = r) = \frac{2r}{r(r+1)}$ .

b)  $P(X_{n+1} = r) = P(X_{n+1} = r | X_n = r)P(X_n = r) + P(X_{n+1} = r | X_n < r)(1 - P(X_n = r)) = \frac{r-1}{r+1}P(X_n = r) + \frac{2}{r+1}$

c)  $P(X_n = r) = 1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^n$

3. a)  $Z(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ ;  $P(Z = 1) = P(X_1 = r)$

b) facile

c)  $P(Z = k) = P(X_{k-1} < r)P(X_k = r | X_{k-1} < r) = \left[1 - \left(1 - \left(\frac{r-1}{r+1}\right)^{k-1}\right)\right] \frac{2}{r+1}$

d)  $Z \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{r+1}\right)$

**Exercice 22** [sujet] 1.  $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$  et  $P(X = k) = \frac{1}{n}$  donc  $E(X) = \frac{n+1}{2}$  et  $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

2.  $Y = n - X$  donc  $E(Y) = n - E(X) = \frac{n-1}{2}$

**Exercice 23** [sujet] 1. Si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{(1-x)^{r+1}} = \sum_{n=r}^{+\infty} \binom{n}{r} x^{n-r}$

2.  $P \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$ .

3. Si  $(T = k)$  est réalisé, au cours de  $k-1$  premier tirages, on cherche la probabilité d'obtenir  $i$  boules blanches parmi les  $n-1$  boules non rouges donc  $P(X = i | T = k) = \binom{k-1}{i} p^i (1-p)^{k-1-i}$  si  $i \leq k-1$  (et 0 si  $i \geq k$ ).

4. On en déduit  $P(X = i) = \sum_{k=i+1}^{+\infty} \binom{k-1}{i} p^i (1-p)^{k-i-1} \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k-1} = \frac{1}{np+1-p} \left(\frac{p(n-1)}{np+1-p}\right)^i$ ; c'est à dire  $1+X \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{np+1-p}\right)$  donc  $E(X) = (n-1)p$  et  $V(X) = p(n-1)(np+1-p)$

**Exercice 24** [sujet]  $X$  est donc le temps d'attente du  $r^{\text{ème}}$  succès dans une répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli, c'est donc la somme de  $r$  variables aléatoires discrètes suivant  $\mathcal{G}(p)$  mutuellement indépendantes donc vu en cours (avec les fonctions génératrices)

**Exercice 25** [sujet] 1.  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

2.  $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$  pour  $|x| < 1$ .

3.  $P(S_N = k) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = k | N = n)P(N = n) = p^{k+1}(1-p)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-p)^{2(n-k)} = \frac{1}{2-p} \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^k$  donc  $S_N + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2-p}\right)$

**Exercice 26** [sujet] 1.  $P(T = 0) = P(X_0 = X_1 = 1) = \frac{1}{4}$ ;  $P(T = 1) = P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) = \frac{1}{8}$  et  $P(T = 2) = P(X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) = \frac{1}{8}$

2.  $p_{n+1} = P(A_{n+1}|A_n)p_n + P(A_{n+1}|B_n)q_n$  puis  $P(A_{n+1}|A_n) = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$  et  $P(A_{n+1}|B_n) = P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{2}$ ; de même  $q_{n+1} = P(B_{n+1}|A_n)p_n + P(B_{n+1}|B_n)q_n$  et  $P(B_{n+1}|A_n) = P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2}$  et  $P(B_{n+1}|B_n) = 0$  car on terminerait par deux 1 aux rangs  $n$  et  $n + 1$ .

3.  $(T = n) = B_n \cap (X_{n+1} = 1)$  donc  $P(T = n) = \frac{1}{2}q_n$ ; on a  $q_{n+2} = \frac{1}{2}p_{n+1} = \frac{1}{4}(p_n + q_n) = \frac{1}{2}q_{n+1} + \frac{1}{4}q_n$ ; si on pose  $u_n = 2^{n+2}P(T = n) = 2^nq_n$ , on a  $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$  et  $u_0 = 4P(T = 0) = 1$  et  $u_1 = 8P(T = 1) = 1$  donc  $u_n = F_n$

**Exercice 27** [sujet] 1. Si  $(X_{n-1} = 0)$  est réalisé, les deux jetons de  $A$  valent 0 donc on aura  $(X_n = 1)$ ; si  $(X_{n-1} = 2)$  est réalisé, les deux jetons valent 1 donc idem; si  $(X_{n-1} = 1)$  on a un jeton 0 et un jeton 1 par boîte donc on aura  $(X_n = 0)$  avec une probabilité  $\frac{1}{4}$  (échanger le jeton 1 de  $A$  avec le jeton 0 de  $B$ ). On en déduit  $P(X_n = 0) = \frac{1}{4}P(X_{n-1} = 1)$ .

2. De même  $P(X_n = 2) = \frac{1}{4}P(X_{n-1} = 1)$  et  $P(X_n = 1) = P(X_{n-1} = 0) + \frac{1}{2}P(X_{n-1} = 1) + P(X_{n-1} = 2)$

3. Avec  $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ , on a  $U_{n+1} = AU_n$  avec  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$ . Reste à calculer  $A^n$  avec  $\mathcal{X}_A = X(X - 1)(X - 1/2) \dots$

**Exercice 28** [sujet] 1.  $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(N, \frac{1}{6}\right)$

2. Si  $k \geq i$ ,  $P(X_2 = k|X_1 = i) = \binom{N-i}{k-i} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-i} \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{N-k}$  puisqu'il reste  $N - i$  dés à relancer si  $(X_1 = i)$  est réalisé et il faut en faire  $k - i$  supplémentaires. On en déduit  $P(X_2 = k) = \sum_{i=0}^k \binom{N-i}{k-i} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-i} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k} \times \binom{N}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i} = \binom{N}{k} \left(\frac{11}{36}\right)^k \left(1 - \frac{11}{36}\right)^{N-k}$ . C'est logique puisque cela revient à lancer tous les dés deux fois et compter combien ont donné au moins une fois 6 (événement de probabilité  $\frac{11}{36}$ ).

3. On lance tous les dés  $j$  fois et on compte le nombre de dé ayant obtenus au moins un 6 : la probabilité de n'avoir aucun 6 sur un dé en  $j$  lancers est  $\left(\frac{1}{6}\right)^j$  donc  $X_j$  suit  $\mathcal{B}\left(N, 1 - \left(\frac{1}{6}\right)^j\right)$ .

**Exercice 29** [sujet] 1.  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{p}\right)$

2. Ne pas s'arrêter à un étage est une expérience de Bernoulli de paramètre  $P(X_i = 0) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$  donc si  $Y_i$  est la variable aléatoire discrète de Bernoulli valant 1 si on ne s'arrête pas à l'étage  $i$ , on a  $X = p - \sum_{i=1}^p Y_i$ , ce qui donne

$$E(X) = p - \sum_{i=1}^p E(Y_i) = p - p \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n$$

$$3. E(X) = p \left[1 - \left(1 - \frac{n}{p} + o\left(\frac{1}{p}\right)\right)\right] \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} n$$

**Exercice 30** [sujet]  $Z(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$  et, si  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $P(Z = k) = P(Y = k, X = 0) + P(X = k) = \frac{1}{n}(1-p)^n + \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ . Donc  $E(Z) = \sum_{k=1}^n kP(Z = k) = \frac{n+1}{2}(1-p)^n + np$

**Exercice 31** [sujet] 1.  $\frac{X_k}{k}$  prend les valeurs 0 et 1 donc est une loi de Bernoulli.  $P\left(\frac{X_k}{k} = 1\right) = \sum_{i=0}^n P(X_k = k|A_i)P(A_i)$   $P(A_i) = 2^{-n} \binom{n}{i}$  puisqu'il y a  $2^n$  poignées possibles et  $\binom{n}{i}$  qui sont de cardinal  $i$ ; si  $i \geq 1$ ,  $P(X_k = k|A_i) = \frac{1}{2}$

$k|A_i) = \frac{\binom{n-1}{i-1}}{\binom{n}{i}}$  puisqu'une poignée à  $i$  éléments contient  $k$  si et seulement si c'est la réunion de  $\{k\}$  et d'une poignée à  $i-1$  éléments autres que  $k$ . On en déduit  $P(X_k = k) = \frac{2^{n-1}}{2^n} = \frac{1}{2}$ .

2.  $X = \sum_{k=0}^n X_k$  donc  $E(X) = \sum_{k=0}^n kE\left(\frac{X_k}{k}\right) = \sum_{k=0}^n k\frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$ .

**Exercice 32** [sujet] 1.  $P(Y = k) = P(X = 2k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$  si  $k \geq 1$  et  $P(Y = 0) = 2 - e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda)$

2.  $E(Y) = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{2} \operatorname{sh}(\lambda)$

3. Avec  $k^2 = \frac{1}{4}[(2k)(2k-1) + (2k)]$  et th de transf,  $4E(Y^2) = e^{-\lambda} \sum_{k \geq 1} \frac{\lambda^{2k}}{(2k-2)!} + \frac{\lambda^{2k}}{(2k-1)!} = e^{-\lambda}(\lambda^2 \operatorname{ch} \lambda + \lambda \operatorname{sh} \lambda)$

**Exercice 33** [sujet] 1.  $E(Z_n) = \prod_{i=1}^n E(X_i)$  par indép mutuelle (généralisation du résultat du cours) et  $E(X_i) = 1 - 2p$  donc  $E(Z_n) = (1 - 2p)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

2.  $Z_n(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $Z_n = 1$  si et seulement si un nombre pair de  $X_i$  valent  $-1$  donc  $P(Z_n = 1) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} p^{2k} (1 - p)^{n-2k} = \frac{1}{2} [1 + (1 - 2p)^n]$  (développer  $(p + (1 - p))^n$  et  $(p - (1 - p))^n$  et les ajouter)

3. Si  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indép alors  $E(Z_1 Z_2) = E(Z_1)E(Z_2) = (1 - 2p)^3$ ; mais  $Z_1 Z_2 = X_2$  donc  $E(Z_1 Z_2) = E(X_2) = 1 - 2p$  donc  $p = \frac{1}{2}$  est la seule possibilité (car  $p \neq 0$ ). Pour  $p = \frac{1}{2}$ ,  $P(Z_1 = 1) = P(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$ ,  $P(Z_2 = 1) = \frac{1}{2}$  et  $P(Z_1 = 1, Z_2 = 1) = P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4}$  donc  $Z_1$  et  $Z_2$  sont indép (les autres cas se traitent de même)

**Exercice 34** [sujet] 1. par continuité décroissante  $P\left(\bigcap_{k \geq 1} A_k\right) = \lim_{p \rightarrow +\infty} P(B_p)$ ; par coalitions, les  $A_k$  sont indép

donc  $P(B_p) = \prod_{k=1}^p P(A_k)$  et  $P(A_k) = P((X_{2k-1} = 0) \cup (X_{2k} = 0)) = P(X_{2k-1} = 0) + P(X_{2k} = 0) - P(X_{2k-1} = X_{2k} = 0) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ . Donc  $P(B_p) = \left(\frac{8}{9}\right)^p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ .

$$\overline{\bigcap_{k \geq 1} A_k} = \bigcup_{k \geq 1} (X_{2k-1} = X_{2k} = 1) \subset \bigcap_{j \geq 1} (X_j = X_{j+1} = 1) = (T \in \mathbb{N})$$

2.  $P(T = n+1) = P(T = n+1|X_1 = 0)P(X_1 = 0) + P(T = n+1|X_1 = 1)P(X_1 = 1) = P(T = n)\frac{1}{3} + P(T = n-1)\frac{1}{3}\frac{2}{3}$   
car si  $(X_1 = 1)$  et  $(T = n+1)$  (avec  $n \geq 3$ ) alors  $(X_2 = 0)$ . De plus  $P(T = 2) = \frac{4}{9}$  et  $P(T = 3) = \frac{4}{27}$   
3.  $T$  est à valeurs dans  $\mathbb{N}$  (presque sûrement) donc  $E(T)$  existe dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  et on a  $E(T) = \sum_{n \geq 2} nP(T = n) = 2P(T = 2) + 3P(T = 3) + \sum_{n \geq 3} (n+1)P(T = n+1) = \frac{8}{9} + \frac{4}{9} + \sum_{n \geq 3} (n+1) \left[ \frac{1}{3}P(T = n) + \frac{2}{9}P(T = n-1) \right] = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}(E(T) - 2P(T = 2) + 1 - P(T = 2)) + \frac{2}{9}(E(T) + 2) \dots$

**Exercice 35** [sujet] 1. On a  $X(\Omega) \subset [-n, n]$  mais  $X_n(\Omega) \neq [-n, n]$  : si  $n$  est pairs les positions atteintes sont d'indices pairs et si  $n$  est impair, seules les positions impaires sont atteignables.

2.  $X_n = n - 2D_n$

3.  $D_n \sim \mathcal{B}(np)$  donc  $P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n-k} p^k (1-p)^{n+k}$  et  $P(X_{2n+1} = 2k+1) = \binom{2n+1}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n+k+1}$

4.  $E(X_n) = n - 2E(D_n) = n(1 - 2p)$

**Exercice 36** [sujet] 1. On pose  $V_n = 1$  si on va à droite et  $V_n = 0$  si on va vers la gauche;  $V_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$  et  $X_{n+1} - X_n = 2V_{n+1} - 1$  donc  $X_n = 2 \sum_{k=1}^n V_k - n$ . Par indépendance des déplacements,  $Y_n = \sum_{k=1}^n V_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  donc  $X_n(\Omega) \subset [-n, n]$  et  $P(X_n = k) = P\left(Y_n = \frac{k+n}{2}\right) = \begin{cases} \binom{n}{h} p^h (1-p)^{n-h} & \text{si } k+n = 2h \\ 0 & \text{si } k+n \text{ est impair} \end{cases}$

2. Par linéarité de l'espérance,  $E(X_n) = 2 \sum_{k=1}^n E(V_k) - n = n(2p-1)$  donc  $X_n$  est centrée si et seulement si  $p = \frac{1}{2}$ .
3.  $V(X_n) = 2^2 V(Y_n)$  et  $V(Y_n) = \sum_{k=1}^n V(V_k)$  par indépendance 2 à 2 des  $V_k$ . On a donc  $V(X_n) = 4np(1-p)$ .

**Exercice 37** [sujet] 1. a)  $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right)$

b)  $Y_r(\Omega) = [r, +\infty]$ ;  $P(Y_r = r) = \frac{r!}{n^r}$ . Pour obtenir les  $r$  boules en  $r+1$  tirages, on doit avoir dans les  $r$  premiers tirages soit une boule de numéro  $\geq r+1$  ( $r \times (n-r)$  possibilités) soit une boule de numéro  $\leq r$  qui se répète à deux rangs différentes ( $\binom{r}{2} \times r$  choix) donc  $P(Y_r = r+1) = \frac{r!}{n^{r+1}} \left(n-r+\binom{r}{2}\right)$

2. a)  $X_i$  est le temps d'attente d'un nouveau numéro (lorsque  $i-1$  d'entre eux sont déjà sortis) donc  $X_i \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{r-i+1}{n}\right)$  et  $E(X_i) = \frac{n}{r-i+1}$
- b)  $Y_r = \sum_{i=0}^r X_i$  (avec  $W_0 = 0$ ) donc  $E(Y_r) = \sum_{i=0}^r \frac{n}{r-i+1} = n \sum_{k=1}^{r+1} \frac{1}{k}$  donc  $Y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} n \ln(n)$ .

**Exercice 38** [sujet] 1. Probas totale avec le SCE  $(A_{n+1}, \overline{A_{n+1}})$  où  $A_{n+1}$  est « on tire une boule rouge au  $n+1$ ème tirage ».

2.  $E(X_{n+1}) = \sum_{k=0}^N k P(X_{n+1} = k) = \sum_{k=0}^N k \frac{N-k}{N} P(X_n = k) + k \frac{k+1}{N} P(X_n = k+1) \xrightarrow{h=k+1} E(X_n) - \sum_{k=0}^N \frac{k^2}{N} P(X_n = k) + \sum_{h=1}^N (h-1) \frac{h}{N} P(X_n = h)$  (car  $P(X_n = N+1) = 0$ ) donc  $E(X_{n+1}) = E(X_n) - \frac{1}{N} E(X_n) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) E(X_n)$
3.  $E(X_n) = N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$  donc (Markov VAD positive)  $P(X_n \geq 1) \leq N \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et  $\frac{E(X_n)}{N} = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$
4. si l'urne ne contient plus de boule rouge alors il n'y en aura plus jamais donc  $(X_{n+1} \geq 1) \subset (X_n \geq 1)$  et si  $(Y = 0)$  alors il y a toujours une boule rouge donc  $(Y = 0) \subset \bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1)$ . On en déduit  $P(Y = 0) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \geq 1)\right) = P(X_n \geq 1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $P(Y = 0) = 0$

**Exercice 39** [sujet] Le nombre de poignées est  $2^n$ , celui contenant le jeton  $i$  est  $2^{n-1}$  donc  $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ ; puis  $S = \sum_{i=1}^n i X_i$  donc  $E(S) = \sum_{i=1}^n i \frac{1}{2} = \frac{n(n+1)}{4}$

**Exercice 40** [sujet] 1.  $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(6)$  et  $F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \frac{1}{6} \lfloor t \rfloor & \text{si } t \in [1, 6[ \\ 1 & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$

2.  $(Y_n \leq t) = \bigcap_{i=1}^n (X_i \leq t)$  donc, par indépendance mutuelle,  $F_n(t) = (F_X(t))^n$

3.  $(F_n)$  CS vers  $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 6 \\ 1 & \text{si } t \geq 6 \end{cases}$  donc  $\|f - F_n\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

4. On a  $(Z_n > t) = \bigcap_{i=1}^n (X_i > t)$  donc  $1 - F_{Z_n}(t) = (1 - F_X(t))^n$  puis  $(F_{Z_n})$  CS vers  $g : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ ; la CV est uniforme car  $\|g - F_{Z_n}\|_\infty = \left(\frac{5}{6}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 41** [sujet] Comme  $X^2 = X$  et  $Y^2 = Y$ ,  $A$  est une matrice de projection si et seulement si  $XY = 0$ ; non nulle si et seulement si  $X \neq 0$  ou  $Y \neq 0$  donc si et seulement si  $X$  ou  $Y$  (et pas les 2) est nul :  $P(A\text{proj}) = P(X = 0, Y = 1) + P(X = 1, Y = 0) = (1-n)p + n(1-p)$ .

**Exercice 42** [sujet]  $\mathcal{X}_M(\lambda) = \lambda^2 - \lambda Y + (X + Y)$  donc  $M$  est DZ si et seulement si  $\Delta = Y^2 - 4(X + Y) > 0$  (car si  $\Delta = 0$  et si  $M$  était DZ,  $M$  serait semblable à  $rI_2$  donc on aurait  $M = rI_2$ ). On examine les 9 possibilités pour les valeurs du couple  $(X, Y)$  et on trouve  $M$  DZ si et seulement si  $(X, Y) \notin \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ . Par incompatibilité 2 à 2 de ces événements et indépendance de  $X$  et  $Y$ , on trouve  $P(\text{'} M \text{ DZ } \text{'}) = 3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

**Exercice 43** [sujet] 1. On a  $\text{rg}(M) \leq 1$  donc  $\text{rg}(M)$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p = 1 - P(M = 0) = 1 - (1-p)^n$  par indépendance.

2. On vérifie  $M^2 = \text{Tr}(M)M$  donc  $M$  est une matrice de projection si et seulement si  $\text{Tr}(M) = 1$  et  $\text{Tr}(M) \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$
3.  $M$  est symétrique donc  $M$  est une matrice de projection orthogonale si et seulement si  $M^2 = M$  donc si et seulement si  $\text{Tr}(M) = 1$ ; de plus  $\text{Im}(M) = \text{Vect}\{U\}$  donc  $M$  est la projection orthogonale cherchée si et seulement si  $(X_1 = \dots = X_n = 1)$  donc avec une probabilité égale à  $p^n$

**Exercice 44** [sujet] 1. Les matrices triangulaires

2.  $\mathcal{X}_A = X^3 + X[(X_2 - X_1)^2 + (X_3 - X_2)^2]$  donc  $A$  vérifie  $(P)$  si et seulement si  $X_1 = X_2$  et  $X_2 = X_3$ . La probabilité que  $A$  vérifie  $(P)$  est donc  $P(X_1 = X_2 = X_3) \stackrel{\text{indep}}{=} \sum_{k=1}^{+\infty} P(X_1 = k)P(X_2 = k)P(X_3 = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^3(1-p)^{3(k-1)} = \frac{p^3}{1 - (1-p)^3}$

**Exercice 45** [sujet] 1.  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et  $P(T = n) = P(Y = n-1) = e^{-2} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}$

2.  $\sum_{k \geq 0} p_k = e^{-2} \left( \text{ch}(2) + \alpha \sum_{h \geq 0} \frac{2^{2h+1}}{(2h+1)!} \right) = e^{-2}(\text{ch}(2) + \alpha \text{sh}(2))$ ; on doit donc avoir  $\alpha = 1$ .

On remarque que  $p_k = P(T = 2k) + P(T = 2k+1)$  donc  $E(X) = \sum_{k \geq 1} kp_k = \frac{1}{2}E(T) - \frac{1}{2} \sum_{k \geq 0} P(T = 2k+1) = \frac{1}{2}(3 - \text{ch}(2))$

**Exercice 46** [sujet] 1.  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$

2.  $\sum_{k=0}^n P(X = k) = \frac{a}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k+1} = \frac{a}{n+1} (2^{n+1} - 1)$  donc  $a = \frac{n+1}{2^{n+1} - 1}$

3. Le même calcul donne  $G_X(t) = \frac{(1+t)^{n+1} - 1}{(2^{n+1} - 1)t}$  puis  $E(X) = \frac{n2^{n+1} + 1}{2^{n+1} - 1}$  et  $V(X) = \dots$

**Exercice 47** [sujet] 1.  $p_k \geq 0$  et  $\sum_{k \geq 1} p_k = p^2 \frac{1}{(1 - (1-p))^2} = 1$

2. Par th de transfert  $E(X-1) = \sum_{k \geq 1} p^2 k(k-1)(1-p)^{k-1} = p^2 \frac{2(1-p)}{(1 - (1-p))^3} = \frac{2(1-p)}{p}$  et  $E(X-1)(X-2) = \sum_{k \geq 1} p^2 k(k-1)(k-2)(1-p)^{k-1} = p^2(1-p)^2 \frac{6}{(1 - (1-p))^4} = \frac{6(1-p)^2}{p^2}$

3. Par linéarité de l'espérance,  $E(X) = E(X-1) + 1 = \frac{2-p}{p}$  et  $V(X) = E((X-1)(X-2)) + 3E(X) - 2 - E(X)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2}$

**Exercice 48** [sujet] 1. Il est plus facile d'utiliser le TCD que le TITT :  $\sum_{k=1}^n P(X = k) = r \int_0^1 (1-t)^{r-1} (1-t^n) dt$  et  $|(1-t)^{r-1} (1-t^n)| \leq \frac{1}{(1-t)^{1-r}}$  qui est intégrable sur  $[0, 1[$  donc  $\sum_{k \geq 1} P(X = k) = r \int_0^1 (1-t)^{r-1} dt = 1$ .

2. Si  $r = 1$ , on vérifie (IPP) que  $P(X = k) = \frac{1}{k+1}$  donc  $E(X)$  n'existe pas (et pas plus si  $r \leq 1$ ); par contre, pour  $r > 1$ , on trouve (TCD encore)  $E(X) = r \int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2} (1-t)^r dt = r \int_0^1 (1-r)^{r-2} dt = \frac{r}{r-1}$ . On prouve de même que  $E(X)$  n'existe que pour  $r > 2$ .

**Exercice 49** [sujet] 1.  $1 + X \hookrightarrow \mathcal{G} \left( \frac{1}{1+a} \right)$  et  $\frac{1}{1+a} \in ]0, 1[$

2. a)  $Z(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $P(Z = n) = \sum_{k \geq 0} P(X = k, Y = n-k) = \sum_{k=0}^n P(X = k)P(Y = n-k) = (n+1) \frac{a^n}{(1+a)^{n+2}}$

b)  $E\left(\frac{1}{1+Z}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} P(Z=n) = \frac{1}{1+a}$ ; par symétrie on a  $E\left(\frac{x}{1+Z}\right) = E\left(\frac{Y}{1+Z}\right)$  donc  $2E\left(\frac{X}{1+Z}\right) = E\left(\frac{Z}{1+Z}\right) = 1 - E\left(\frac{1}{1+Z}\right) = \frac{a}{1+a}$

3. a)  $P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X=k) = 1 - \left(\frac{a}{1+a}\right)^{n+1}$

b)  $T(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $P(T \geq k) = P(X \geq k)P(Y \geq k) = \left(\frac{a}{1+a}\right)^{2(n+1)}$  puis  $P(T=k) = P(T \geq k) - P(T \geq k+1)$ .

**Exercice 50** [sujet] 1. Par linéarité et  $E(X) = E(Y)$ , on a  $2E(x) - 1 = E(Z) = \frac{1}{p}$  donc  $E(X) = \frac{1+p}{2p}$

2. Par indép de  $X$  et  $Y$  (et  $G_X = G_Y$ ), on a  $G_Z(t) = tG_X(t)^2$  donc  $G_X(t) = \sqrt{\frac{p}{1+(1-p)t}}$  (positif car  $G_X^2$  donc  $G_X$  ne s'annule pas, est continue sur  $]-R, R[$  et positive en 1)

3.  $(1-u)^{-1/2} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{u^n}{4^n}$  si  $|u| < 1$  donc par DSE de  $G_X$ , on trouve  $P(X=n) = \sqrt{p} \binom{2n}{n} \frac{(1-p)^n}{4^n}$

**Exercice 51** [sujet] 1. Par théorème de transfert,  $E(Y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{p^k(1-p)^{n-k}}{1+k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k+1} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1}{p(n+1)} [1 - (1-p)^{n+1}]$

2.  $Z(\Omega) = \{-1, 1\}$  et  $P(Z=1) = \sum_{k \geq 0} P(X=2k) = e^\lambda \operatorname{ch}(\lambda)$ ;  $E(Z) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P(X=k) = e^{-2\lambda}$

**Exercice 52** [sujet]  $E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{1+k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} (e^\lambda - 1)$

**Exercice 53** [sujet] 1.  $P(Y=1+n^2) = P(X=n)$

2.  $2X < Y \Leftrightarrow 0 < (1-X)^2$  donc  $P(2X < Y) = P(X \neq 1) = 1 - P(X=1)$

3.  $P(X \in 2\mathbb{N}) = \sum_{k \geq 0} P(X=2k) = e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda)$

4.  $e^{-\lambda} \operatorname{ch}(\lambda) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2} > \frac{1}{2}$ .

**Exercice 54** [sujet] 1.  $T(\Omega) = \mathbb{N}^*$  puis  $(T=k) = (X=k, Y \geq k+1) \cup (X=Y=k) \cup (Y=k, X \geq k+1)$  donc, per indép de  $X$  et  $Y$   $P(T=k) = p^2(1-p)^{2k-2} + 2p(1-p)^{k-1} \sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = p(2-p)(1-p)^{2k-2}$  donc  $T \hookrightarrow \mathcal{G}(p(2-p))$ ,  $E(T) = \frac{1}{p(2-p)}$  et  $G_T(t) = \frac{p(2-p)t}{1-(1-p)^2 t}$

2. Par transfert,  $E\left(\frac{1}{T(T+1)}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} P(X=k)$  (la série est ACV car  $\frac{1}{k(k+1)} \leq 1$ ) puis  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$  et  $E\left(\frac{1}{T(T+1)}\right) = p(2-p) \left[ \frac{-\ln(1-(1-p)^2)}{(1-p)^2} - \frac{-\ln(1-(1-p)^2) - (1-p)^2}{(1-p)^4} \right]$

**Exercice 55** [sujet] 1.  $N \sim \mathcal{G}\left(\frac{3}{5}\right)$  car la proba de faire au moins 6 est  $\frac{3}{5}$

2. si  $E_k$  est faire  $> 6$  au lancer  $k$  et  $F_n$  est la valeur du dé au  $n^{\text{ème}}$  lancer alors  $(X=k, N=n) = E_1 \cap \dots \cap E_{n-1} \cap (F_n = k)$  donc  $P(X=k, N=n) = \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \times \frac{1}{10}$

3.  $P(X=k) = \sum_{n \geq 1} P(X=k, N=n) = \frac{1}{6}$  donc  $X \sim \mathcal{U}(6)$

4. on vérifie  $P(X=k, N=n) = P(X=k)P(N=n)$  donc elles sont indépendantes.

**Exercice 56** [sujet] 1. si  $k, n \geq 1$ ,  $P(X=k, Y=n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < n \\ 2^{-(k+1)} & \text{si } k \geq n \end{cases}$  car pour  $k \geq n$ ,  $(X=k, Y=n) = F_1 \cap \dots \cap F_{n-1} \cap P_n \cap \dots \cap P_k \cap F_{k+1}$

2.  $P(X = k) = \sum_{n=1}^k 2^{-(k+1)} = \frac{k}{2^{k+1}}$

3. pour  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k \geq 0} x^k$  donc  $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k \geq 0} kx^{k-1}$  et  $\frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{k \geq 0} k(k-1)x^{k-2}$  donc  $E(X) = \sum_{k \geq 1} \frac{k^2}{2^{k+1}} = \frac{1}{8} \sum_{k \geq 0} \frac{k(k-1)}{2^{k-2}} + \frac{1}{4} \sum_{k \geq 0} \frac{k}{2^{k-1}}$

**Exercice 57** [sujet] 1.  $N(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$  donc  $S(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$

2.  $P(S = i, N = j) = P(S = i | N = j)P(N = j) = \binom{j}{i} \gamma^i (1-\gamma)^{j-i} \times \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$  pour  $i \leq j$  (0 sinon)

3.  $P(S = i) = \sum_{j=i}^n P(S = i, N = j) = \binom{n}{i} (p\gamma)^i (1-p\gamma)^{n-i}$

**Exercice 58** [sujet] 1.  $P(X = k, Y = h) = P(Y = h | X = k)P(X = k) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k p^h (1-p)^{k-h}}{h!(k-h)!} & \text{si } h \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

2.  $P(Y = h) = \sum_{k \geq 0} P(X = k, Y = h) = \sum_{k \geq h} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k p^h (1-p)^{k-h}}{h!(k-h)!} \stackrel{j=h-k}{=} \sum_{j \geq 0} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{j+h} p^h (1-p)^j}{h!j!} = \frac{e^{-\lambda} p^h \lambda^h}{h!} \times e^{\lambda(1-p)}$   
donc  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$

3.  $P(X = 0, Y = 1) = 0$  alors que  $P(X = 0)P(Y = 1) \neq 0$  donc les variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes.

**Exercice 59** [sujet] 1.  $S(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  puis  $G_S(t) = G_X(t)^2 = \left( \frac{pt}{1 - (1-p)t} \right)^2$  donc  $P(S = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}$

2. Pour  $1 \leq n \leq k-1$ ,  $P(X = n | S = k) = \frac{P(X = n, Y = k-n)}{P(S = k)} = \frac{1}{k-1}$  (loi uniforme)

3.  $1-p = \frac{P(Z > n+1)}{P(Z > n)}$  donc  $P(Z > n) = (1-p)^n P(Z > 0)$  puis  $P(Z = n) = P(Z > n-1) - P(Z > n) = p(1-p)^{n-1} P(Z > 0)$  et comme  $\sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n) = 1$ , on trouve  $P(Z > 0) = 1-p$  et  $1+Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ .

4.  $P(S = Z) = \sum_{n=2}^{+\infty} P(S = n, Z = n) = \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)p^3(1-p)^{2n-2} = p^3 \frac{(1-p)^2}{(1 - (1-p)^2)^2} = p(1-p)^2$ .

**Exercice 60** [sujet] Si  $Z = \min(X, Y)$ , on a  $P(Z \geq k) = P(X \geq k, Y \geq k) \stackrel{\text{indep}}{=} P(X \geq k)P(Y \geq k) = \left( \sum_{j \geq k} p(1-p)^{j-1} \right)^2 = (1-p)^{2(k-1)}$  puis  $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k+1)$  et  $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p(2-p))$ .

**Exercice 61** [sujet] 1.  $P(U = k, V = k) = P(X = Y = k) = p^2(1-p)^{2k-2}$  et si  $i > j$  alors  $P(U = i, V = j) = P(X = i, Y = j) + P(X = j, Y = i) = 2p^2(1-p)^{i+j-2}$

2.  $P(U = i) = \sum_{j=1}^i P(U = i, V = j) = 2p(1-p)^{i-1} - p(2-p)(1-p)^{2i-1}$  et  $P(V = j) = \sum_{i \geq j} P(U = i, V = j) = p(2-p)(1-p)^{2j-2}$  donc  $V \hookrightarrow \mathcal{G}(p(2-p))$

**Exercice 62** [sujet] 1.  $P(Y = n) = \sum_{k=0}^n P(X = k, Y = n) = p(1-p)^n$  donc  $1+Y \sim \mathcal{G}(p)$

2. dériver  $k$  fois le DSE de  $\frac{1}{1-x}$  puis  $P(X = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X = k, Y = n) = \frac{2p}{1+p} \left( \frac{1-p}{1+p} \right)^k$  donc  $1+X \sim \mathcal{G} \left( \frac{2p}{1+p} \right)$

3.  $P(X = 1, Y = 0) = 0$  mais  $P(X = 1)P(Y = 0) \neq 0$

**Exercice 63** [sujet] 1.  $P(X = i) = \sum_{j=0}^i P(X = i, Y = j) = \frac{e^{-\beta} \beta^i}{i!} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \alpha^j (1-\alpha)^{i-j}$  donc  $X \sim \mathcal{P}(\beta)$  et

$P(Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j) \stackrel{k=i-j}{=} \frac{e^{-\beta} (\alpha\beta)^j}{j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \beta^k (1-\alpha)^k k!$  donc  $Y \sim \mathcal{P}(\alpha\beta)$

2.  $P(X = 1, Y = 2) = 0$  alors que  $P(X = 1)P(Y = 2) \neq 0$

3.  $P(Z = n) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j + n, Y = j) = e^{-\beta} \frac{(1-\alpha)^n \beta^n}{n!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\alpha\beta)^j}{j!}$  donc  $Z \sim \mathcal{P}(\beta(1-\alpha))$

4.  $P(Y = j | Z = n) = \frac{P(Y = j, X = n + j)}{P(Z = n)} = \dots = P(Y = j)$  donc  $Y$  et  $Z$  sont indépendantes

**Exercice 64** [sujet] 1.  $\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} P(X = i, Y = j) = 4^n$  donc  $\lambda = 4^{-n}$

2.  $P(X = i) = \sum_{j=1}^{n+1} P(X = i, Y = j) = \binom{n}{n-i} 2^{-n}$  donc on vérifie  $X$  et  $Y$  indépendantes (et de même loi)

3.  $Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$  donc  $E(X) = 1 + E(Z) = \frac{n}{2}$  et  $V(X) = V(Z) = \frac{n}{4}$ .

4. Par indépendance  $E(XY) = E(X)E(Y) = E(X)^2$  puis  $E(2^{X-Y}) = E(2^X)E(2^{-Y}) = 1$  puisque  $X$  et  $Y$  sont de même loi

**Exercice 65** [sujet] 1.  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} P(X = i, Y = j) = \lambda e^{2a}$  donc  $\lambda = e^{-2a}$

2.  $P(X = i) = \sum_{j \geq 0} P(X = i, Y = j)$  donne  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$  puis  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(a)$ ; elles sont indépendantes

3.  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(2a)$

**Exercice 66** [sujet] 1.  $\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} \frac{a}{2^{i+1} j!} = ae$  donc  $a = e^{-1}$ .

2.  $P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$  et  $P(Y = j) = \frac{e^{-1}}{j!}$  donc indépendantes.

3.  $1 + X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$  donc  $E(X) = 1 + 2 = 3$  et  $V(X) = V(1 + X) = 2$

4.  $P(X = Y) = \sum_{i \geq 0} P(X = i, Y = i) = e^{-1} \frac{e^{1/2}}{2}$ ; la matrice est DZ si et seulement si  $X \neq Y$  car si  $X = Y$  elle possède une seule valeur propre (double) et l'espace propre n'est que de dimension 1.

**Exercice 67** [sujet] 1.  $G_X(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{nt^n}{2^{n+1}} = \frac{t}{(2-t)^2}$  pour  $|t| < 2$  et on a bien  $G_X(1) = 1$

2.  $E(X) = G'_X(1) = 3$

3. Si  $j \leq i$ ,  $P(X = i, Y = j) = P(Y = j | X = i)P(X = i) = \frac{1}{i} P(X = i) = \frac{1}{2^{i+1}}$

4.  $P(Y = j) = \sum_{i=j}^{+\infty} P(X = i, Y = j) = \frac{1}{2^j}$  donc  $Y \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $E(Y) = 2$ .

**Exercice 68** [sujet] 1. Le fait qu'un électron soit efficace est une expérience de Bernoulli, indépendantes mutuellement les unes des autres donc  $P(X = i | N = j) = \binom{j}{i} p^i (1-p)^{j-i}$  (si  $i \leq j$  bien sûr)

2.  $X(\Omega) = N(\Omega) = \mathbb{N}$  puis  $P(X = i, N = j) = P(X = i | N = j)P(N = j) = \dots$

3.  $P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i | N = j)P(N = j) = \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{j!}{i!(j-i)!} p^i (1-p)^{j-i} e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!} \stackrel{k=j-i}{=} \frac{p^i}{i!} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1-p)^k \lambda^{i+k}}{k!}$  donc  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ ,  $E(X) = V(X) = \lambda p$

4. On trouverait de même  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda(1-p))$  puis  $X + Y = N$  donc  $V(N) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y)$ , ce qui donne  $2 \text{Cov}(X, Y) = \lambda - \lambda p - \lambda(1-p) = 0$ .

**Exercice 69** [sujet] 1.  $X_{(N=n)} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

2.  $P(X = k, N = n) = P(X = k | N = n)P(N = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} p (1-p)^{n-1}$  si  $k \leq n$

3. Si  $k \geq 1$ ,  $P(X = k) = \sum_{n \geq 1} P(X = k, N = n) = p^{k+1}(1-p)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} [(1-p)^2]^{n-k} = \frac{p^{k+1}(1-p)^{k-1}}{(1-(1-p)^2)^{k+1}} = \frac{1}{(2-p)^2} \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1}$  alors que  $P(X = 0) = \sum_{n \geq 1} P(X = 0 | N = n) = \sum_{n \geq 1} p(1-p)^{2n-1} = \frac{1-p}{2-p}$
4.  $E(X) = \frac{1}{2-p} \sum_{k \geq 1} k \frac{1}{2-p} \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{k-1} = 1$

**Exercice 70** [sujet] 1. a)  $(X_1 = k) = P_1 \dots P_k F_{k+1} \cup F_1 \dots F_k P_{k+1}$  donc  $P(X_1 = k) = p^k q + q^k p$

$$\text{b)} \quad E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \text{ donc } E(X_1) - 2 = \left( \sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}} \right)^2$$

2. a)  $(X_1 = k, X_2 = h) = P_1 \dots P_k F_{k+1} \dots F_{k+h} P_{k+h+1} \cup F_1 \dots F_k P_{k+1} \dots P_{k+h} F_{k+h+1}$  donc  $P(X_1 = k, X_2 = h) = p^{k+1} q^h + q^{k+1} p^h$
- b)  $P(X_2 = h) = \sum_{k \geq 1} P(X_1 = k, X_2 = h) = p^2 q^{h-1} + q^2 p^{h-1}$
- c)  $E(X_2) = 2$  et  $V(X_2) = 2 \left( \frac{p}{q} + \frac{q}{p} - 1 \right)$

3. Si  $X_1$  et  $X_2$  sont indépendantes alors  $P(X_1 = X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)$  donc  $2(p^2 + q^2) = 1$  ce qui donne  $p = \frac{1}{2}$ ; on vérifie alors que  $X_1$  et  $X_2$  sont bien indépendantes pour  $p = \frac{1}{2}$ .

**Exercice 71** [sujet] 1.  $P(Y = 0 | X = 0) = 1$  et  $P(Y = i | X = 0) = 0$  puis  $P(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$  si  $k \leq n$  (0 sinon)

2.  $P(X = n, Y = k) = P(Y = k | X = n)P(X = n)$  donc  $P(X = Y = 0) = P(X = 0) = e^{-\lambda}$ ,  $P(X = 0, Y = k) = 0$  et  $P(X = n, Y = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ . On en déduit  $P(Y = 0) = e^{-\lambda} + \sum_{n \geq 1} P(X = n | Y = 0) = e^{-\lambda p}$  et  $P(Y = k) = \sum_{n \geq k} P(X = n, Y = k)$  donc  $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda p)$ .

**Exercice 72** [sujet] 1.  $U = XY$  donc  $E(U) = E(X)E(Y) = \frac{p}{a}$  puis  $X^2 = X$  donc  $E(U^2) = E(X)E(Y^2)$  donc  $V(U) = pE(Y^2) - p^2 E(Y)^2 = pV(Y) + p(1-p)E(Y)^2$

2.  $V = XZ + (1-X)Y$  donc  $E(V) = E(X)E(Z) + (1-E(X))E(Y)$ ; comme  $X(1-X) = 0$ ,  $E(V^2) = E(X)E(Z^2) + (1-E(X))E(Y^2)$

**Exercice 73** [sujet] 1.  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$

$$2. \quad P(X_k, Y = h) = P(X = k)P(Y = h | X = k) = \frac{1}{n} \frac{1}{k} \text{ pour } h \leq k \text{ (0 sinon)}; \quad P(X = k) = \sum_{h=1}^k \frac{1}{nk} = \frac{1}{n}$$

$$3. \quad P(Y = h) = \sum_{k=h}^n \frac{1}{nk} \text{ puis } E(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{nk} \sum_{h=1}^k h = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2n} = \frac{n+3}{4}.$$

$$4. \quad P(X = Y) = \sum_{k=1}^n P(X = y = k) \text{ puis } \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \sim \ln(n) \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X = Y) = 0$$

**Exercice 74** [sujet] 1.  $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$  (cours)

$$2. \quad P(X = k | Z = n) = \frac{P(X = k, Y = n-k)}{P(Z = n)} \text{ donc on trouve } X_{(Z=n)} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)$$

**Exercice 75** [sujet] 1.  $D(\Omega) = \mathbb{N}$ ; si  $n \geq 1$ ,  $(D = n) = \bigcup_{k \geq 1} [(X = n+k, Y = k) \cup (Y = n+k, X = k)]$  donc par

incompatibilité 2 à 2 de  $(X = k)$  et  $(X = n+k)$  et indépendance de  $X$  et  $Y$ , on a  $P(D = n) = 2p^2 \sum_{k \geq 1} (1-p)^{n+2k-2} =$

$$\frac{2p(1-p)^n}{2-p}.$$
 De même  $(D = 0) = \bigcup_{k \geq 1} (X = Y = k) = \frac{p}{2-p}$

2.  $T + U = X + Y$ ,  $T - U = |Y - X|$  et  $TU = XY$

3.  $\text{Cov}(T, U) = E(TU) - E(T)E(U)$  puis  $E(TU) = E(X)E(Y) = \frac{1}{p^2}$  par indépendance de  $X$  et  $Y$ ;  $E(T) + E(U) = E(T + U) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{p}$  et  $E(T) - E(U) = E(D) = \sum_{n \geq 1} nP(D = n) = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}$  donc  $E(T) = \frac{3-p}{p(2-p)}$  et  $E(U) = \frac{1}{p(2-p)}$  et au final  $\text{Cov}(T, U) = \frac{1-3p+p^2}{p^2(2-p)^2}$
4.  $P(T = 1, U = 2) = 0$  alors que  $P(T = 1)P(U = 2) \neq 0$ .

**Exercice 76** [sujet] 1. a)  $V(\Omega) = \mathbb{N}$  et  $M(\Omega) = \mathbb{N}^*$ ;  $P(V = 0, M = n) = P(X = Y = n) = p^2(1-p)^{2n-2}$  et, si  $k \geq 1$ ,  $P(V = k, M = n) = P(X = n, Y = n+k) + P(X = n+k, Y = n) = 2p^2(1-p)^{2n+k-2}$

b)  $P(V = 0) = \sum_{n \geq 1} P(V = 0, M = n) = \frac{p}{2-p}$ ,  $P(V = k) = 2p \frac{(1-p)^k}{2-p}$  et  $P(M = n) \sum_{k \geq 0} P(V_k, M = n) = p(2-p)(1-p)^{2n-2}$ . On vérifie que  $V$  et  $M$  sont indépendantes.

2. a)  $P(V = 1, M = n) = P(X = n, Y = n+1) + P(X = n+1, Y = n) = 2p_n p_{n+1}$  et par indépendance de  $V$  et  $M$ , on a  $2p_n p_{n+1} = P(V = 1)P(M = n)$ ; de même on trouve  $p_n^2 = P(V = 0)P(M = n)$  puis par quotient  $\frac{p_{n+1}}{p_n}$  est constant;  $(p_n)$  est une suite géométrique donc  $X$  et  $Y$  suivent une loi géométrique.

3. La loi de  $X$  et  $Y$  est géométrique si et seulement si  $M$  et  $V$  sont indépendantes.

**Exercice 77** [sujet] 1.  $(X+Y)(\Omega) \subset X(\Omega) + Y(\Omega) \subset \mathbb{Z}$  et  $P(X+Y = n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k, Y = n-k) \stackrel{\text{indép}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = k)P(Y = n-k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} P(X = -k)P(Y = k-n) = P(X+Y = -n)$

2. Par récurrence sur  $p$ , en admettant que si  $X_1, \dots, X_p$  sont mutuellement indépendantes alors  $X_1 + \dots + X_{p-1}$  et  $X_p$  sont indépendantes

**Exercice 78** [sujet] 1.  $N_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$

2.  $Z_{i,j}$  est le nombre de jetons  $i$  ou  $j$  tirés donc  $Z_{i,j} \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i + p_j)$  et  $\text{Cov}(N_i, N_j) = \frac{1}{2} (V(Z_{i,j}) - V(N_i) - V(N_j))$

**Exercice 79** [sujet] 1. Si  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ ; pour les loi de Bernoulli,  $E(X) = P(X = 1)$  et  $E(Y) = P(Y = 1)$ . De plus  $XY(\Omega) = \{0, 1\}$  donc  $XY$  suit aussi une loi de Bernoulli et  $P(XY = 1) = E(XY) = P(X = Y = 1)$ .

2.  $(X = 1)$  et  $(Y = 1)$  sont indépendants donc  $(X = 1)$  et  $(\overline{Y = 1}) = (Y = 0)$  aussi; idem pour les deux derniers.

**Exercice 80** [sujet] 1. Par bilinéarité, on a  $\text{Cov}(S, D) = -\text{Cov}(X, Y) + \text{Cov}(Y, X) = 0$  mais  $S$  et  $D$  ne sont pas indépendantes car  $P(S = 2, D = 0) = P(X = Y = 1) = \frac{1}{n^2}$  alors que  $P(S = 2) = P(X = Y = 1) = \frac{1}{n^2}$  et  $P(D = 0) = \sum_{k=1}^n P(X = Y = k) = \frac{1}{n}$ .

2. a)  $S(\Omega) = [\![2, 2n]\!]$

b)  $P(S = k) = \sum_{i=1}^n P(X = i, Y = k-i) = \sum_{k=\max\{1, k-n\}}^{\min\{n, k-1\}} \frac{1}{n^2} = \begin{cases} \frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } k \geq n+1 \\ \frac{k-1}{n^2} & \text{si } k \leq n+1 \end{cases}$

**Exercice 81** [sujet] 1.  $D(\Omega) = \mathbb{N}$ ;  $P(D = 0) = \sum_{k \geq 1} P(X = k, Y = k) = \sum_{k \geq 1} p^2(1-p)^{2k-2} = \frac{p}{2-p}$  et, si  $n \geq 1$ ,

$$P(D = n) = \sum_{k \geq 1} P(X = k, Y = n+k) + P(X = n+k, Y = k) = 2 \sum_{k \geq 1} p^2(1-p)^{n+2k-2} = 2p \frac{(1-p)^n}{2-p}$$

2.  $T + U = X + Y$ ,  $T - U = D$  et  $UT = XY$ ; on en déduit  $E(UT) = E(XY) = E(X)E(Y) = \frac{1}{p^2}$ ,  $E(T) + E(U) = E(X) + E(Y) = \frac{2}{p}$  et  $E(T) - E(U) = E(D) = \sum_{k \geq 1} 2kp \frac{(1-p)^k}{2-p} = \frac{2(1-p)}{p(2-p)}$  ce qui donne  $\text{Cov}(T, U) = \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p} + \frac{1-p}{p(2-p)}\right) \left(\frac{1}{p} - \frac{1-p}{p(2-p)}\right) = \frac{(1-p)^2}{p^2(2-p)^2}$ .

**Exercice 82** [sujet] 1.  $P(X = Y) = \sum_{n \geq 1} P(X = n, Y = n) = \sum_{n \geq 1} p^2(1-p)^{2(n-1)} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}$ . Comme  $\det(M) = X^2 - Y^2$  et  $X + Y \geq 2$  (donc  $\neq 0$ ),  $M$  est inversible si et seulement si  $X \neq Y$  donc proba  $1 - \frac{p}{2-p}$

2. Les valeurs propres de  $M$  sont  $\lambda_1 = X + Y$  et  $\lambda_2 = X - Y$  donc  $\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2) = E[(X + Y)(X - Y)] - E(X + Y)E(X - Y) \stackrel{\text{lin}}{=} E(X^2) - E(Y^2) - E(X)^2 + E(Y)^2 = V(X) - V(Y) = 0$ . Mais elles ne sont pas indépendantes car  $P(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0) = P(X + Y = 3, X = Y) = 0$  alors que  $P(X = Y) \neq 0$  et  $P(X + Y = 3) = P(X = 1, Y = 2) + P(X = 2, Y = 3) = 2p^2(1 - p)^2 \neq 0$ .

**Exercice 83** [sujet] 1. Il suffit de prendre  $X_i \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

2. a)  $X(\Omega) \subset [a, b]$  donc  $E(X) \in [a, b]$  et  $(X - E(X))(\Omega) \in [a - b, b - a]$  puis  $(X - E(X))^2(\Omega) \in [0, (b - a)^2]$   
b) Si  $\alpha = \inf(X_i(\Omega))$  alors  $\inf(X(\Omega)) = n\alpha \geq a$  donc (idem de l'autre côté),  $X_i(\Omega) \subset \left[\frac{a}{n}, \frac{b}{n}\right]$   
c) Par indépendance (deux à deux suffit) on a  $V(X) = nV(X_i) \leq \frac{(b - a)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  donc  $V(X) = 0$  et  $X$  est constante presque sûrement

**Exercice 84** [sujet] 1.  $\{V(X), X \in \mathcal{E}\}$  est une partie de  $\mathbb{R}^+$  (donc minorée) non vide (car  $\mathcal{E}$  est non vide)

2.  $V(X_1 + X_2) = 2V_0 + 2\text{Cov}(X_1, X_2) \stackrel{\text{C-Sch}}{\leq} 2V_0 + 2V_0 = 4V_0$  donc, comme  $\frac{1}{2}(X_1 + X_2) \in \mathcal{E}$ , on a  $V\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) = V_0$  ; on a donc  $V(X_1 - X_2) = 2V_0 - \text{Cov}(X_1, X_2) = 0$  car on a égalité dans l'inégalité découlant de Cauchy-Schwarz donc  $\text{Cov}(X_1, X_2)^2 = V_0^2$ .

**Exercice 85** [sujet] 1.  $f$  et  $g$  sont croissantes donc  $f(X) - f(Y)$  et  $g(X) - g(Y)$  sont du même signe. On a donc  $E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \geq 0$  mais  $E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] = E[f(X)g(X)] - E[f(X)]E[g(Y)] - E[f(Y)]E[g(X)] + E[f(Y)g(Y)]$  car  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes, puis  $E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] = 2E[f(X)g(X)] - 2E[f(X)]E[g(X)]$  car  $X$  et  $Y$  suivent la même loi et enfin,  $\text{Cov}(f(X), g(X)) = E[f(X)g(X)] - E[f(X)]E[g(X)] = \frac{1}{2}E[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))] \geq 0$

2. On introduit  $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$  sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $f : t \mapsto a_{\lfloor t \rfloor}$  et  $g : t \mapsto b_{\lfloor t \rfloor}$  qui sont croissantes. On a alors  $\text{Cov}(f(X), g(X)) = E[f(X)g(X)] - E[f(X)]E[g(X)]$  puis  $E[f(X)] = \sum_{i=1}^n f(i)P(X = i) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i$  (de même pour  $E[g(X)]$ ) et  $E[f(X)g(X)] = E[fg(X)] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i$  pour les mêmes raisons.

**Exercice 86** [sujet] 1.  $P(D_1 > D_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$  donc (lancers indép)  $X \sim \mathcal{B}\left(n, \frac{5}{12}\right)$

2.  $E(X) = \frac{5n}{12}$  et  $V(X) = np(1 - p)$

3. cours

4.  $\frac{X}{E(X)} \in [0.9, 1.1] \Leftrightarrow |X - E(X)| \leq 0.1E(X)$  donc  $p_n = P\left(|X - E(X)| \leq \frac{5n}{120}\right) \leq \frac{np(1 - p)}{(np)^2}$

**Exercice 87** [sujet]  $E(X) = n$  donc (Markov)  $P(X \geq n^2) \leq \frac{1}{n}$  puis  $V(X) = n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$  donc (BT),  $P|X - n| \geq n \leq 1 - \frac{1}{n}$ . Pour la dernière :  $X \geq 2n \Rightarrow X - n = |X - n| \geq n$  donc  $(X \geq 2n) \subset (|X - n| \geq n)$

**Exercice 88** [sujet] On pose  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  ; on a  $E(S_n) = \sum_{i=1}^n p_i$  et  $V(S_n) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$  par indépendance 2 à 2.

Par B-Tch, on a  $P(|S_n - E(S_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2}V(S_n)$ . Comme  $p_i(1 - p_i) \leq \frac{1}{4}$ , on en déduit  $P(|S_n - E(S_n)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{1}{n^2\varepsilon^2} \frac{n}{4} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Exercice 89** [sujet] 1. Par linéarité de l'espérance,  $E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = q_n$ . De même,  $V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) =$

$\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)$  car les  $X_i$  sont indép

2. On applique B-T à  $\frac{1}{n}S_n$  :  $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - q_n\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)}{n^2\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  car  $\sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) \leq \sum_{i=1}^n 1 = n$  donc  $\frac{\sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i)}{n^2\varepsilon} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

3.  $\lim q_n = p$  donc il existe  $n_0$  tel que  $n \geq n_0 \Rightarrow |q_n - p| < \frac{1}{2}\varepsilon$ . Par inégalité triangulaire,  $\left| \frac{1}{n}S_n - p \right| \leq \left| \frac{1}{n}S_n - q_n \right| + |q_n - p| \leq \left| \frac{1}{n}S_n - q_n \right| + \frac{1}{2}\varepsilon$  pour  $n \geq n_0$ . Ainsi, si  $\left| \frac{1}{n}S_n - p \right| > \varepsilon$ , on a  $\left| \frac{1}{n}S_n - q_n \right| > \frac{1}{2}\varepsilon$  si  $n \geq n_0$ , ie  $\left( \left| \frac{1}{n}S_n - p \right| > \varepsilon \right) \subset \left( \left| \frac{1}{n}S_n - q_n \right| > \frac{1}{2}\varepsilon \right)$  puis  $P\left(\left| \frac{1}{n}S_n - p \right| > \varepsilon\right) \leq P\left(\left| \frac{1}{n}S_n - q_n \right| > \frac{1}{2}\varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Exercice 90** [sujet] 1. Cours

2. Si  $Y_i$  et  $Y_{i+1}$  ne sont pas indép mais si  $j \geq i+2$  alors  $Y_i$  et  $Y_j$  le sont.
3.  $E(Y_i) = 2E(X_i) = 2p$  et  $E(M_n) = 2p$  par linéarité.  $V(Y_i) = 2V(X_i) = 2p(1-p)$  par indép puis  $V(M_n) = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{i=1}^n V(Y_i) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) \right) = \frac{2p(1-p)}{n} + \frac{n-1}{n^2} p(1-p)$  car par bilinéarité  $\text{Cov}(Y_i, Y_{i+1}) = \text{Cov}(X_i, X_{i+1}) + \text{Cov}(X_i, X_{i+2}) + \text{Cov}(X_{i+1}, X_{i+1}) + \text{Cov}(X_{i+1}, X_{i+2}) = V(X_{i+1}) = p(1-p)$ .
4. On applique B-Tch et on vérifie  $\frac{V(M_n)}{\varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

**Exercice 91** [sujet] 1.  $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$  donc  $E\left(e^{x(S_n - \frac{n}{2})}\right) \xrightarrow{\text{transf}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{xk} \frac{e^{-nx/2}}{2^n} = \frac{e^{-nx/2}}{2^n} (1 + e^x)^n = \left(\text{ch} \frac{x}{2}\right)^n$

2. a) On a  $f'(x) = \alpha - \frac{1}{2} \text{th}\left(\frac{x}{2}\right)$  donc  $f$  est maximale en  $x \in \mathbb{R}^+$  tel que  $\text{th} \frac{x}{2} = 2\alpha$  (unique car th est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $]-1, 1[$ )
- b) On commence par  $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \alpha\right) = P\left(e^{x(S_n - n/2)} \geq e^{n\alpha x}\right) \xrightarrow{\text{Markov}} \frac{\left(\text{ch} \frac{x}{2}\right)^n}{e^{n\alpha x}} = e^{-nf(x)}$  et on choisit le  $x$  pour lequel  $f$  est maximale.  
On fait de même pour  $P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\alpha\right) = P\left(e^{x(n/2 - S_n)} \geq e^{n\alpha x}\right) \leq e^{-n\alpha x} E\left(e^{x(n/2 - S_n)}\right) = e^{-nf(x)}$  puis on ajoute les 2 puisque  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \alpha\right) = P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \geq \alpha\right) + P\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2} \leq -\alpha\right)$

**Exercice 92** [sujet] 1.  $Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$  donc  $Y_n$  suit une loi de Bernoulli et  $P(Y_n = 1) = P(U_n = U_{n+1} = 1) = p^2$  par indépendance donc  $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(p^2)$

2. Pour  $|n - m| \geq 2$
3. Si  $|n - m| \geq 2$ , on a  $E(Y_n Y_m) = E(Y_n)E(Y_m) = p^4$  et  $E(Y_n Y_{n+1}) = E(U_n U_{n+1} U_{n+2})$  car  $U_{n+1}^2 = U_{n+1}$ , puis par indépendance mutuelle,  $E(Y_n Y_{n+1}) = E(U_n)E(U_{n+1})E(U_{n+2}) = p^3$ ; par linéarité,  $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = p^2$
4.  $V(S_n) = \sum_{k=1}^n V(Y_k) - 2 \sum_{k=1}^{n-1} \text{Cov}(Y_k, Y_{k+1})$ ;  $V(Y_k) = p^2(1-p^2)$  et  $\text{Cov}(Y_k, Y_{k+1}) = p^3(1-p)$  donc  $V(S_n) = np^2(1-p^2) - 2(n-1)p^3(1-p)$ . On ne peut pas appliquer la loi faible des grands nombres car les  $Y_k$  ne sont pas deux à deux indépendantes mais avec B-T, on a  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p^2\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{V(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{n^2 \varepsilon^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

**Exercice 93** [sujet] 1.  $E(e^{uN}) = \sum_{k \geq 0} e^{uk} P(X = k) = e^{\lambda(e^u - 1)}$

2. Étudier  $u \mapsto E\left(e^{u(N - (1+y)\lambda)}\right) = \exp[\lambda(e^u - 1) - (1+y)\lambda u]$  (minimum en  $u = \ln(1+y)$ )

3.  $P(N \geq (1+y)\lambda) = P\left(e^{u(N - (1+y)\lambda)} \geq 1\right) \leq E\left(e^{u(N - (1+y)\lambda)}\right)$  par inégalité de Markov (vad positive)

**Exercice 94** [sujet] 1. Si  $f(t) = t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1}))$  alors  $f(0) = 0$  et  $E(e^{tX_1}) = \sum_{k=1}^n e^{tx_k} P(X_1 = x_k)$  donc  $f'(0) = \varepsilon - \frac{\sum_{k=1}^n x_k P(X_1 = x_k)}{E(e^0)} = \varepsilon - E(X_1) = \varepsilon > 0$  donc  $f$  est positive à droite de 0 donc prend des valeurs positives strictement (donc le sup n'est pas nul).

2. On applique l'inégalité de Markov à  $e^{tS_n} \geq 0$ :  $P(S_n \geq n\varepsilon) = P(e^{tS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq e^{-tn\varepsilon} E(e^{tS_n})$ ; par indépendance mutuelle des  $(X_i)$  (résultat HP mais sans doute admis pour cet exercice)  $E(e^{tS_n}) = E\left(\prod_{i=1}^n e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = E(e^{tX_1})^n$  donc  $P(S_n \geq n\varepsilon) \leq \exp[-n(t\varepsilon - \ln(E(e^{tX_1})))]$ ; ceci est valable pour tout  $t > 0$  donc on introduit une suite  $(t_k)$  telle que  $t_k\varepsilon - \ln(E(e^{t_k X_1})) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} h_+(\varepsilon)$  et on obtient le résultat.

A nouveau en admettant l'indépendance de  $S_n$  (qui ne dépend que des  $X_i$ ,  $i \leq n$ ) et de  $\sum_{k=1}^m X_{n+k}$ , on a  $P(S_n \geq m\varepsilon)P\left(\sum_{k=1}^m X_{n+k} \geq m\varepsilon\right) = P\left(S_n \geq n\varepsilon, \sum_{k=1}^m X_{n+k} \geq m\varepsilon\right)$  et  $\left(S_n \geq n\varepsilon, \sum_{k=1}^m X_{n+k} \geq m\varepsilon\right) \subset (S_{n+m} \geq (n+m)\varepsilon)$

**Exercice 95** [sujet] 1.  $X_1 = n$  et  $P(X_2 = n) = P(X_2 = n-1) = \frac{1}{2}$

2.  $(X_p = k) = \emptyset$  si  $k \geq n+1$

3.  $X_p(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$

4.  $E(X_{p+1}) = G'_{p+1}(1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)G'_p(1) = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)E(X_p)$  donc  $E(X_p) = n\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{p-1} \xrightarrow[p \rightarrow +\infty]{} 0$  : plus on fait de tirages, plus la probabilité que toutes les boules blanches aient été retirées de l'urne est grande.

**Exercice 96** [sujet] 1.  $P(T_n = 1) = \frac{1}{N^{n-1}}$  : il faut tirer  $n-1$  fois la même boule que la première.  $P(T_n = 2) = \binom{N}{2} \left[ \left(\frac{2}{N}\right)^n - 2\left(\frac{1}{N}\right)^n \right]$  : on choisit 2 boules parmi les  $N$  et on tire  $n$  fois l'une des 2, et on retire les 2 cas où on ne tirerait qu'une seule des 2 boules choisies. Enfin, si  $n \leq N$ ,  $P(T_n = n) = \binom{N}{n} \frac{n!}{N^n}$  : on choisit les  $n$  boules à tirer puis on les ordonne de façon à les tirer chacune une seule fois ;  $P(T_n = n) = 0$  par contre si  $n > N$ .

2.  $(T_{n+1} = k+1)$  est réalisé si  $(T_n = k+1)$  était déjà réalisé et si on retire au rang  $n+1$  une des  $k+1$  boules déjà tirées ou si  $(T_n = k)$  était réalisé et si on a tiré au rang  $n+1$  une des  $N-k$  boules qui n'avaient pas encore été tirées. On en déduit  $P(T_{n+1} = k+1) = \frac{k+1}{N}P(T_n = k+1) + \frac{N-k}{N}P(T_n = k)$ .

3.  $G_{n+1}(t) = \sum_{k=1}^N P(T_{n+1} = k)t^k = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N P(T_n = k)t^k + \sum_{k=1}^N P(T_n = k-1)t^k - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (k-1)P(T_n = k-1)t^k = tG_n(t) + \frac{t(1-t)}{N}G'_n(t)$ . On en déduit, avec  $G_n(1) = 1$  et  $E(T_n)G'_n(1)$ ,  $E(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)E(T_n) + 1$ , suite arithmético-géométrique et  $E(T_n) = N - (N-1)\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{n-1}$

**Exercice 97** [sujet] 1.  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$  donc  $a = 1$

2.  $nP(X = n) \sim \frac{1}{n}$  donc  $E(X)$  (et  $V(X)$ ) n'existe pas

3.  $G_X(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n} - \frac{t^n}{n+1} = -\ln(1-t) - \frac{1}{t}(-\ln(1-t) - t)$

**Exercice 98** [sujet] 1.  $\sum_{k \geq 1} P(X = k) = \frac{1}{4} \sum_{h \geq 0} h \left(\frac{1}{2}\right)^{h-1} = \frac{1}{4} \frac{1}{(1-1/2)^2} = 1$ .

2. Même calcul :  $G_X(t) = \frac{t^2}{(2-t)^2}$  et  $R = 2$

3.  $G_X$  est donc dérivable en 1 donc  $E(X) = G'_X(1) = 4$

**Exercice 99** [sujet] 1.  $P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^n \frac{\lambda^k}{k!}$  et vérifier par IPP successives.

2.  $P(X \leq n) = F_X(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$  donc  $\int_{\lambda}^{+\infty} t^n e^{-t} dt \sim n!$

3.  $G_X(1) = \sum_{k \geq 0} P(X = k)$  et  $G_X(-1) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k P(X = k)$  donc  $P(X \in 2\mathbb{N}) = \frac{1}{2}(G_X(1) + G_X(-1)) = \frac{1}{2}(1 + e^{-2\lambda})$

4.  $(XY \in 2\mathbb{N}) = (Y = 2) \cup (X \in 2\mathbb{N})$  donc  $P(XY \in 2\mathbb{N}) = P(Y = 2) + P(X \in 2\mathbb{N}) - P(Y = 2)P(X \in 2\mathbb{N})$  par indépendance

**Exercice 100** [sujet] 1. Si  $|x| < 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{4^n}$

2.  $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$  donc  $\sum_{n \geq 0} P(X = n) = r \frac{1}{\sqrt{1-1/2}} = r\sqrt{2}$  donc  $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

3. Pour  $|t| < 2$ , on a  $G_X(t) = r \frac{1}{\sqrt{1-t/2}}$  permet de tout calculer assez facilement

**Exercice 101** [sujet]  $G_{2X}(t) = E(t^{2X}) \stackrel{\text{transfert}}{=} \sum_{k \geq 0} t^{2n} P(X = n) = G_X(t^2)$  et  $G_{X+1}(t) = E(t^{1+X}) = tG_X(t)$  par linéarité de l'espérance

**Exercice 102** [sujet]  $G_X(t) = \frac{t}{2} \frac{1}{1-t^2/2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1}}{2^{n+1}}$  donc  $X(\Omega) = 2\mathbb{N} + 1$  (presque sûrement) et  $P(X = 2n+1) = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Puis  $Y(\Omega) = \mathbb{N} + \frac{1}{2}$  et  $P\left(Y = n + \frac{1}{2}\right) = P(X = 2n+1)$

**Exercice 103** [sujet] 1. cours :  $G_S = G_X G_Y$  par indép

2.  $G_S(t) = (p + (1-p)t)^n (p + (1-p)t)^m = (p + (1-p)t)^{n+m}$  donc  $S \sim \mathcal{B}(n+m, p)$

3.  $G_S(t) = \left(\frac{pt}{1-(1-p)t}\right)^2 = p^2 t^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} t^{n-1}$  si  $|t| < \frac{1}{1-p}$  donc  $P(S = n) = (n-1)p^2(1-p)^{n-2}$  pour  $n \geq 2$

**Exercice 104** [sujet] 1. On a obligatoirement  $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$  (car  $Z$  ne prend que des valeurs  $\geq 0$  donc  $X(\Omega) = Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ ; puis  $Z$  prend la valeur 1 donc  $X$  et  $Y$  prennent la valeur 0 et si  $X$  prenait une valeur  $x \notin \mathbb{N}$  alors  $Z$  prendrait la valeur  $1+x+0 \notin \mathbb{N}$ ) donc  $Y+1 \geq 1$  puis  $0 \leq X \leq Z$  donc l'existence de  $V(Z)$  implique celle de  $V(X)$ . Par linéarité, on a  $\frac{1}{p} = E(Z) = 1 + 2E(X)$  car  $E(X) = E(Y)$  donc  $E(X) = \frac{1-p}{2p}$ . De même  $\frac{1-p}{p^2} = V(Z) = V(Z-1) = V(X) + V(Y)$  par indép donc  $V(X) = \frac{1-p}{2p^2}$ .

2.  $G_Z(t) = tE(t^X t^Y) = tE(t^X)^2$  car  $t^X$  et  $t^Y$  sont indép et de même loi; on a donc  $G_X(t) = \sqrt{\frac{G_Z(t)}{t}} = \sqrt{\frac{p}{1-(1-p)t}}$  puis  $G_X(t) = \sqrt{p}[1-(1-p)]^{-1/2} = \sqrt{p} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k)!}{4^k (k!)^2} (1-p)^k t^k$  donc  $P(X = k) = \sqrt{k} \binom{2k}{k} \frac{(1-p)^k}{4^k}$ .

**Exercice 105** [sujet] 1.  $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{n}\right)$

2.  $P(X = k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{e^{-1}}{k!}$  car  $np_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$

3.  $p(n) + q(n) = P(X \in \llbracket 0, n \rrbracket) = 1$  et  $p(n) - q(n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k p^k (1-p)^{n-k} = (1-2p)^n$  donc  $p(n) = \frac{1}{2}(1-(1-2p)^n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$

4. non car  $P(X = Y = n) = 0$  alors que  $P(X = n)P(Y = n) \neq 0$ .

**Exercice 106** [sujet] Si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$  et  $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$  alors par indépendance,  $G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = [(1-p) + pt]^{n+m}$  donc  $X+Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n+m, p)$

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \sum_{i=0}^k \frac{P(X=i)}{p^i (1-p)^{n-i}} \frac{P(Y=k-i)}{p^{k-i} (1-p)^{m-k+i}} = \frac{P(X+Y)=k}{p^k (1-p)^{n+m-k}} = \binom{n+m}{k}.$$

**Exercice 107** [sujet] 1.  $P(F = n) = \sum_{k \geq 0} P(F = n | X = k) P(X = k)$  et  $F_{(X=k)} \hookrightarrow \mathcal{B}\left(k, \frac{1}{2}\right)$  puis  $G_F(t) =$

$\sum_{n \geq 0} P(F = n) t^n = \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} P(F = n | X = k) P(X = k) t^n$ ; si on admet (dans un premier temps) la possibilité d'échan-

ger les deux sommes, on a  $G_F(t) = \sum_{k \geq 0} \left( \sum_{n=0}^k \binom{k}{n} t^n \right) \frac{1}{2^k} P(X = k) = \sum_{k \geq 0} \left( \frac{1+t}{2} \right)^k P(X = k) = G_X\left(\frac{1+t}{2}\right)$ .

Reste à justifier cette interversion : pour  $|t| < 1$  et  $N \in \mathbb{N}$ , on a  $\Delta_N = \left| \sum_{n=0}^N \sum_{k \geq 0} P(F = n | X = k) P(X = k) t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k \geq 0} P(F = n | X = k) P(X = k) t^n \right|$

$\sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq N+1} P(F = n | X = k) P(X = k) |t|^n$  et  $P(F = n | X = k) \leq 1$  donc  $\Delta_N \leq \sum_{k \geq 0} \frac{|t|^{N+1}}{1-|t|} P(X = k) = \frac{|t|^{N+1}}{1-|t|} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$ .

2. Si  $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$  alors  $G_F(t) = \exp \lambda \left( \frac{1-t}{2} - 1 \right) = e^{\frac{\lambda}{2}(t-1)}$  donc  $F \hookrightarrow \mathcal{P} \left( \frac{\lambda}{2} \right)$ .

Si  $1 + X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$  alors  $G_X(t) = E(t^{(1+X)-1}) = \frac{1}{t} G_{1+X}(t) = \frac{p}{1-(1-p)t}$  donc  $G_F(t) = \frac{p}{1-(1-p)\frac{1+t}{2}} = \frac{2p}{1+p} \frac{1}{1-\frac{1-p}{1+p}t}$  donc  $1 + F \hookrightarrow \mathcal{G} \left( \frac{2p}{1+p} \right)$

**Exercice 108** [sujet]  $1 - G_X(r) = \sum_{k \geq 0} (1 - r^k) P(X = k) \geq \sum_{k \geq n} (1 - r^k) P(X = k) \geq (1 - r^n) \sum_{k \geq n} P(X = k) = (1 - r^n) P(X \geq n)$ . Si on a égalité alors on a  $\sum_{k=0}^{n-1} (1 - r^k) P(X = k) = 0$  et  $(1 - r^n) \sum_{k \geq n} P(X = k) = \sum_{k \geq n} (1 - r^k) P(X = k)$  ce qui donne respectivement  $P(X = k)$  pour  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et  $P(X = k) = 0$  pour  $k \geq n+1$  donc  $X(\Omega) = \{0, n\}$  presque sûrement ; réciproque facile

**Exercice 109** [sujet] 1.  $G_X^{(k)}(1) = \sum_{i=0}^n ni(i-1)\dots(i-k+1)P(X=i)$  et  $u_k(X) = \sum_{i=0}^n i(i-1)\dots(i-k+1)P(X=i)$  donc  $G_X^{(k)} = u_k(X)$

2. On applique la formule de Taylor au polynôme  $G_X$  :  $G_X(t) = \sum_{k=0}^n \frac{G_X^{(k)}(1)}{k!} (t-1)^k = \sum_{k=0}^n \frac{u_k(X)}{k!} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} t^j = \sum_{j=0}^n \sum_{k=j}^n u_k(X) \frac{1}{j!(k-j)!} (-1)^{k-j} t^j$  d'où le résultat en identifiant le coefficient de  $t^j$

**Exercice 110** [sujet] 1.  $T_n = X_1 + \dots + X_n$  où  $X_k \hookrightarrow \mathcal{G} \left( \frac{1}{6} \right)$  (chaque  $X_i$  est le temps d'attente d'un nouveau 6) ; le  $X_i$  sont mutuellement indépendantes dans  $G_{T_n}(t) = G_{X_1}^n(t) = \left( \frac{pt}{1-(1-p)t} \right)^n$  avec  $p = \frac{1}{6}$ . On en déduit  $P(T_n = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$  si  $k \geq n$ .

2.  $Y_n(\Omega) = \mathbb{N}$  et si  $(Y_n = k)$  correspond à la situation suivante : on a effectué exactement  $k+n$  lancers pour obtenir le  $n^{\text{ème}}$  succès ; on a donc un succès au lancer  $k+n$  et on doit répartir les  $n-1$  autres succès sur les  $k+n-1$  autres lancers (il y a  $\binom{k+n-1}{n-1}$  possibilités de répartition) donc  $P(Y_n = k) = \binom{n+k-1}{n-1} p^n (1-p)^k$ . On en déduit  $G_{Y_n}(t) = \left( \frac{p}{1-(1-p)t} \right)^n$ .