I Séries entières

1. Convergence d'une série entière

a) Rayon de convergence : lemme d'Abel, définition du rayon de convergence ($\sup\{\rho > 0 | (a_n\rho^n)$ est bornée$\}$), absolue convergence à l'intérieur du disque ouvert de convergence, divergence « grossière » à l'extérieur du disque fermé. $R\left(\sum a_n z^n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (si cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$) et $R\left(\sum n^\alpha z^n\right) = 1$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ sont utilisables directement

b) Opérations sur les séries entières : si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$ et si $a_n = O(b_n)$, $R_b \leqslant R_a$; somme et produit de Cauchy. Égalité des rayons de convergence de $\sum a_n z^n$, $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ et $\sum a_{n-1}\dfrac{z^n}{n}$.

2. Somme d'une série entière

a) Continuité de la somme : convergence normale sur tout segment de $]-R, R[$ dans le cas réel, continuité de la somme sur $]-R, R[$. Continuité sur le disque ouvert de rayon R dans le cas complexe (*admis*).

b) Dérivation et intégration des séries entières de variable réelle : intégration terme à terme de la somme d'une série entière sur tout segment inclus dans le disque ouvert de convergence, classe $\mathcal{C}^\infty$ de la somme sur le disque ouvert de convergence.

3. Fonction développable en série entière

a) Série de Taylor : définition d'une fonction DSE (au voisinage de 0), série de Taylor d'une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$. Une fonction est DSE sur $]-r, r[$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et pour tout $x \in]-r, r[$, le reste $R_n(x)$ de Taylor tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Fonctions usuelles : DSE en 0 de e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ (*Taylor*), $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ (*intégration*) et $(1+x)^\alpha$ (*en utilisant une équation différentielle*).

II Variables aléatoires discrètes

1. Définition d'une variable aléatoire discrète et utilisation des notations $(X = x)$,...Composition par une application, loi d'une variable aléatoire discrète .

2. Couple de variables aléatoires discrètes , loi conjointe et lois marginales, loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$, variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (généralisation à n variables aléatoires discrètes indépendantes), lemme des coalitions.

3. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (nombre de succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes), géométrique (temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes) et de Poisson. Si $X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$.

4. Espérance (existence si $\sum |x_n| P(X = x_n) < +\infty$), théorème de comparaison (si $|X| \leqslant Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors $E(X)$ est finie), espérance des lois usuelles, $E(X) = \sum\limits_{n\geqslant 1} P(X \geqslant n)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert.

À suivre : la fin des variables aléatoires discrètes