(Extrait de Centrale PC 2023 maths 2 ; encore)

On rappelle et on admet les deux résultats suivants.

- Si $a_{i,j} \geqslant 0$ pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, alors les deux sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent dans $[0,+\infty]$ et sont égales. En particulier (cas d'une famille sommable de réels positifs), si l'une des sommes est finie, l'autre aussi et elles sont égales.
- (Cas d'une famille sommable de réels quelconques.) Si $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille de nombres réels telle que la somme $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}|$ est finie, alors les sommes $\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}$ existent et sont égales.

I Séries entières

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^k x^n$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de somme f_k.

2. On s'intéresse dans cette sous-partie à la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$ dont on note R le rayon de convergence.

a) Déterminer R et montrer que, pour tout $x \in]-R,R[$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$.

b) Montrer que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \tag{I.2}$$

c) En déduire que, pour tout $x \in]-R,R[\setminus \{0\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right).$$

d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1} \tag{I.3}$$

II Probabilités

Dans cette partie, toutes les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires discrètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
La lettre p désigne un nombre réel de l'intervalle $]0,1[$.

II.A- Un conditionnement

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la loi géométrique de paramètre p :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = p(1-p)^{n-1}.$$

Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=n]$ est la loi de Poisson de paramètre n :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad P(Y=k \mid X=n) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}.$$

1. Déterminer la loi conjointe de X et Y.

2. Calculer $P(Y=0)$ et montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y=k) = \frac{p}{(1-p)k!} f_k\left(\frac{1-p}{e}\right),$$

où f_k est la fonction définie en **I.1**.

3. Vérifier que l'on a bien $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y=k)=1$.

4. Montrer que Y admet une espérance finie et calculer cette espérance.

5. Montrer que Y admet une variance et calculer cette variance.

II.B- Pile ou face infini

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p. Pour modéliser cette expérience, on admet que l'on peut définir une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $[X_n = 1]$ désigne l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne pile » et $[X_n = 0]$ désigne l'événement « le $n^{\text{ème}}$ lancer donne face ».
Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces »

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces »

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.
Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».
On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, A_n et B_n sont des événements, et que C est un événement.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer A_n à l'aide de la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et en déduire $P(A_n)$.

2. Montrer que les événements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont incompatibles.

3. Montrer que C est un événement et que $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$.

4. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A_{n-k})$.

5. À l'aide notamment de la formule (I.3), montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P(B_n) = \frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}\big(p(1-p)\big)^n.$$

6. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (on pourra utiliser la formule (I.2)).

7. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $P(C) = 1$.