

Partie I

1. $R = 1$

2. a) On a $\left| \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 4$ donc $R = \frac{1}{4}$

Pour $|x| < \frac{1}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!} (-4x)^n$ et (calcul déjà fait plusieurs fois) $\frac{(-1/2)(-3/2)\dots(-1/2-n+1)}{n!} (-4)^n = \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} 4^n = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} 4^n = \binom{2n}{n}$

b) Si on pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ et G la primitive de g nulle en 0 alors on a $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ donc le membre de gauche est $\frac{1}{x}G(x)$. Il suffit donc de vérifier que $G(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$: si on pose $h(x) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x})$, on a bien $h(0) = 0$, h est dérivable sur $]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ et $h'(x) = \frac{1}{2} \frac{(1/2)(4)}{\sqrt{1-4x}} = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$

c) On remarque cette fois que le terme de gauche et le produit de Cauchy des deux séries entières des questions **I.2.b** et **I.2.c** donc vaut $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} \times \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = \frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right)$

d) Avec **I.2.a**, $\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n \stackrel{n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{2k+2}{k+1} x^{k+1}$ donc $\frac{1}{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1 \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n+2}{n+1} x^n$

ce qui donne, en identifiant avec les coefficients du DSE de **I.2.c** $\frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$

Partie II.A

1. $P(X = n, Y = k) = P(Y = k | X = n)P(X = n) = e^{-n} \frac{n^k}{k!} p(1-p)^{n-1}$

2. $P(Y = 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n, Y = 0) = \frac{p}{e} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^{n-1} = \frac{p}{e} \times \frac{1}{1 - \frac{1-p}{e}} = \boxed{\frac{p}{e-1+p}}$

De même, $P(Y = k) = \frac{p}{(1-p)k!} \sum_{n=1}^{+\infty} n^k \left(\frac{1-p}{e} \right)^n = \boxed{\frac{p}{(1-p)k!} f_k \left(\frac{1-p}{e} \right)}$ car le terme $n = 0$ est nul

3. à 5. Pour les 3 questions qui suivent, on peut gagner du temps en passant par la fonction génératrice de Y : si $t \in [0, 1]$ (toutes les séries sont donc à termes positifs donc on va pouvoir appliquer Fubini)

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \frac{p}{e-1+p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p t^k}{(1-p)k!} f_k \left(\frac{1-p}{e} \right) = \frac{p}{e-1+p} + \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p (nt)^k}{(1-p)k!} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n \\ &= \frac{p}{e-1+p} + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{p (nt)^k}{(1-p)k!} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n = \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(nt)^k}{k!} \\ &= \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1-p}{e} \right)^n [e^{nt} - 1] = \frac{p}{e-1+p} + \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n e^{n(t-1)} - \frac{p}{1-p} \frac{\frac{1-p}{e}}{1 - \frac{1-p}{e}} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n e^{n(t-1)} = \frac{pe^t}{e - (1-p)e^t} \end{aligned}$$

donc $G_Y(t) = \frac{p}{e^{1-t} + (1-p)}$ si $t \in [0, 1]$ (on aurait pu faire le même calcul avec $t \in]-1, 1[$ en vérifiant la sommabilité, ie le même calcul avec $|t|$ à la place de t)

On en déduit $\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k) = G_Y(1) = 1$ puis $E(Y) = G'_Y(1) = \frac{1}{p}$ et $V(Y) = G''_Y(1) + E(Y) - E(Y)^2 = \frac{1}{p^2}$

Partie II.B

1. Comme $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$, le nombre de piles est le nombre de fois où X_i prend la valeur 1 et $A_n = (X_1 + \dots + X_{2n} = n)$

$X_1 + \dots + X_{2n}$ est une somme de $2n$ variables indépendantes suivant $\mathcal{B}(p)$ donc $X_1 + \dots + X_{2n} \sim \mathcal{B}(2n, p)$ et

$$P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

2. Un événement ne pouvant se produire pour la première fois qu'une seule fois, les (B_n) sont deux à deux incompatibles.
 3. On a $C = \bigcup_{n \geq 1} B_n$ donc C est une réunion dénombrable d'événement donc est aussi un événement. Par σ -additivité,

les B_n étant 2 à 2 incompatibles, on a
$$P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$$

4. On note B_∞ l'événement « on n'a jamais autant de piles que de faces » : $B_\infty = \overline{\bigcup_{n \geq 1} B_n}$ est donc bien un événement.

La famille $((B_n)_{n \geq 1}, B_\infty)$ est un SCE et on a donc $P(A_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_n | B_k) P(B_k) + P(A_n \cap B_\infty)$. On a $A_n \cap B_\infty = \emptyset$

et si $k > n$, $A_n \cap B_k = \emptyset$ donc il reste $P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_n | B_k) P(B_k)$. Si B_k est réalisée, on peut considérer qu'on recommence le jeu à partir du lancer $2k+1$ (on était à l'équilibre après le lancer $2k$) ; on sera donc à nouveau à l'équilibre après le lancer $2n$ avec la même probabilité que celle d'y être après $2n-2k$ lancers. On a donc

$$P(A_n) = \sum_{k=1}^n P(A_{n-k}) P(B_k)$$

5. Comme $P(A_0) = P(\Omega) = 1$, on a $P(B_n) = P(A_n) - \sum_{k=1}^{n-1} P(A_{n-k}) P(B_k)$ et on va pouvoir déterminer la valeur de $P(B_n)$ par récurrence forte sur n :

$B_1 = A_1$ donc $P(B_1) = P(A_1) = p(1-p)$ qui est bien le résultat attendu pour $n=1$.

Si on suppose $P(B_k) = \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k$ pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ alors on a

$$\begin{aligned} P(B_n) &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n-2k}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{n-k} \frac{2}{k} \binom{2k-2}{k-1} p^k (1-p)^k \\ &= \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \binom{2k-2}{k-1} \\ &\stackrel{k=h+1}{=} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \sum_{h=0}^{n-2} \frac{1}{h+1} \binom{2n-2-2h}{n-1-h} \binom{2h}{h} \\ &\stackrel{I.3}{=} \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n - 2p^n (1-p)^n \left[\frac{1}{2} \binom{2n}{n} - \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \right] \end{aligned}$$

donc
$$P(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} p^n (1-p)^n$$

6. On a $P(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n) \stackrel{n=k+1}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{k+1} \binom{2k}{k} p^{k+1} (1-p)^{k+1}$ donc avec (I.2), pour $x = p(1-p) \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[$, on a

$$P(C) = p(1-p) \times \frac{1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}}{p(1-p)} \text{ donc } P(C) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$$

7. Si $p = \frac{1}{2}$ alors $x = \frac{1}{4}$ donc on ne peut pas appliquer directement (I.2) donc on commence par vérifier que (I.2) est encore valable en $x = \frac{1}{4}$ en vérifiant que $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$:

H1 : $u_n = x \mapsto \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1}$ est continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$

H2 : $\|u_n\|_\infty = \binom{2n}{n} \frac{4^{-n}}{n+1} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} 2\sqrt{\pi n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} \times \frac{4^{-n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n^{3/2}}}$ donc $\sum u_n$ CVN sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$

S est donc continue sur $\left[0, \frac{1}{4} \right]$ et on a $P(C) = \frac{1}{4} S\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}^-} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$ donc $P(C) = 1$