TD18 : Variables aléatoires

Exercice 1 **(CCINP PSI 2024)**
La secrétaire d'une société appelle les n clients de cette société. Elle joint chaque client, indépendamment les uns des autres avec une probabilité $p \in]0,1[$. On note X le nombre de clients joints lors de ce premier appel. Elle rappelle alors les $n-X$ clients qu'elle n'a pas pu joindre. Elle joint chacun d'entre eux avec la probabilité p et on note Y le nombre de clients joints lors de ce deuxième appel. On note Z le nombre de clients joints au cours des deux appels et $q = 1-p$.

1. Quelle est la loi de X ? Donner $E(X)$ et $V(X)$
2. Quelles sont les valeurs prises par Z ?
3. Déterminer $P(Z=0)$ et montrer que $P(Z=1) = np(1+q)q^{2n-2}$
4. Calculer $P(Y=h|X=k)$
5. Montrer que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{j-k} = \binom{n}{j}\binom{j}{k}$ puis $P(Z=j) = \binom{n}{j}q^{2n-2j}(1-q^2)^j$.
   Quelle est la loi de Z ?

Exercice 2 **(Mines-Ponts PSI 2024)**
Le nombre N d'enfants d'une famille suit une loi de Poisson de paramètre a. À sa naissance, chaque enfant à une probabilité $p \in]0,1[$ de survivre, indépendamment des autres. On note M le nombre d'enfants qui ont survécu

1. Déterminer la loi conjointe (N,M) puis la loi et l'espérance de M
2. M et $N-M$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 **(CCINP PSI 2022)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{P}(\lambda)$ et $\mathscr{P}(\mu)$. On pose $Z = X+Y$.

1. Déterminer la loi de Z.
2. Déterminer la loi de X sachant $(Z=n)$.

Exercice 4 **(Mines-Ponts PSI 2024)**
On considère une urne composée de n boules : une est rouge, b sont blanches, et $n-b-1$ sont noires. On note $p = \dfrac{b}{n-1}$.
L'expérience consiste à tirer des boules avec remise et de s'arrêter lorsque la boule rouge est tirée. On note : T la variable aléatoire comptant le nombre de tirages effectués en incluant celui de la boule rouge, et X la variable aléatoire comptant le nombre de boules blanches tirées.

1. Soit $r \in \mathbb{N}$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant r}\binom{n}{r}x^{n-r}$ dont on calculera la somme.
2. Donner la loi de probabilité de T.
3. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $i \in \mathbb{N}$, calculer $P_{(T=k)}(X=i)$.
4. En déduire la loi de X, calculer son espérance et sa variance.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PC 2015)**
Une pièce amène pile avec la probabilité $p \in]0,1[$. On lance cette pièce une infinité de fois. On appelle « série » toute succession de lancers donnant le même côté de la pièce, succession interrompue par l'obtention de l'autre côté de la pièce. Soit X_1 (resp. X_2) la variable aléatoire discrète égale à la longueur de la première série (resp. celle de la deuxième). Ainsi, par exemple, si on a obtenu : PPPFFP etc... alors $X_1 = 3$ et $X_2 = 2$

1. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). *(*)*
2. En déduire les lois de X_1 et X_2.
3. Calculer $E(X_1)$ et $E(X_2)$.
4. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 **(Mines-Télécom PSI 2024)**
Soit X, Y des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1,0,1\}$ indépendantes et de même loi, telles que $P(X=-1) = P(X=0) = P(X=1)$. On pose $M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ -1 & Y \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité pour que la matrice M soit diagonalisable ? *(*)*

Indications

Exercice 5

1. *Décrire* $(X_1 = h, X_2 = k)$ *en fonctions des événements* P_i *: « faire pile au* $i^{\text{ème}}$ *lancer ».*

Exercice 6

Commencer par trouver une CNS sur (X,Y) *pour que* M *soit DZ, puis penser que* (X,Y) *prend au maximum 9 valeurs.*