TD19 : Variables aléatoires

Exercice 1 **(Mines-Télécom PSI 2023)**
Un pion se déplace sur une droite : il se déplace d'un cran vers la droite avec la probabilité $p \in]0,1[$ et vers la gauche avec la probabilité $1-p$. À l'instant initial, il est à l'origine du repère et on note X_n sa position après n déplacements.

1. Que vaut $X_n(\Omega)$?

2. On note D_n le nombre de déplacements vers la droite au cours des n premiers instants. Relier X_n à D_n.

3. Déterminer les lois de D_n et X_n.

4. Calculer l'espérance de X_n puis sa variance.

Exercice 2 **(Mines-Télécom PSI 2021)**
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{G}(p)$. On pose $M(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $P(X = Y) = \dfrac{p}{2-p}$; en déduire la probabilité que M soit inversible.

2. On note λ_1 et λ_2 les valeurs propres de M. Déterminer la covariance de λ_1 et λ_2 ; sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 **(CCINP PSI 2024)**
Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes telles que $X_i \sim \mathscr{B}(p_i)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $q_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i$ et on suppose $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} q_n = p$

1. Trouver l'espérance et la variance de $\dfrac{1}{n} S_n$

2. Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - q_n\right| > \varepsilon\right) = 0$

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{1}{n} S_n - p\right| > \varepsilon\right) = 0$. *(*)*

Exercice 4 **(CCINP PSI 2024)**
On dispose d'une urne contenant n boules blanches et n boules rouges. On effectue des tirages selon la règle suivante : si l'on pioche une boule rouge, on la remet dans l'urne ; si l'on pioche une boule blanche, on la met de côté et on rajoute une boule rouge dans l'urne. On note la variable aléatoire X_p qui désigne le nombre de boules blanches dans l'urne au $p^{\text{ème}}$ tirage, pour tout p entier naturel non nul.

1. Donner la loi de X_1 et X_2.

2. Pour tout $k \geqslant n+1$, calculer $P(X_p = k)$.

3. Donner une relation entre $P(X_{p+1} = k)$, $P(X_p = k+1)$, $P(X_p = k)$.

4. Justifier que la fonction génératrice G_p est polynomiale.

5. Justifier la relation $G_{p+1}(t) = G_p(t) + \dfrac{1-t}{2n} G'_p(t)$. Donner une relation entre $E(X_{p+1})$ et $E(X_p)$. Calculer $E(X_p)$. Calculer sa limite lorsque p tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 5 **(Mines-Télécom PSI 2022)**
Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes et $S = X + Y$

1. Donner la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et G_Y

2. Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$, donner la loi de S

3. Même question avec $X \sim Y \sim \mathscr{G}(p)$

Exercice 6 **(Centrale PSI 2021)**
Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires discrètes indépendantes suivant $\mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right)$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Justifier l'existence et calculer $E\left(e^{x\left(S_n - \frac{n}{2}\right)}\right)$, où $x \in \mathbb{R}^+$.

2. a) Soient $\alpha \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ et $f(x) = \alpha x - \ln \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2}\right)$. Justifier que f admet sur $\mathbb{R}^{+*}$ un maximum $M_\alpha > 0$.

b) Montrer que $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - \dfrac{1}{2}\right| \geqslant \alpha\right) \leqslant 2e^{-nM_\alpha}$

Indications

Exercice 3

3. *Prouver que, pour n assez grand, on a* $\left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - p\right| > \varepsilon\right) \subset \left(\left|\dfrac{1}{n} S_n - q_n\right| > \dfrac{1}{2}\varepsilon\right)$