

I Variables aléatoires discrètes

1. Définition d'une variable aléatoire discrète et utilisation des notations $(X = x), \dots$. Composition par une application, loi d'une variable aléatoire discrète.
2. Couple de variables aléatoires discrètes, loi conjointe et lois marginales, loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$, variables aléatoires discrètes indépendantes. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi (généralisation à n variables aléatoires discrètes indépendantes), lemme des coalitions.
3. Lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale (nombre de succès dans une répétition d'expériences de Bernoulli indépendantes), géométrique (temps d'attente du premier succès dans une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes) et de Poisson. Si $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} np_n = \lambda$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$.
4. Espérance (existence si $\sum x_n P(X = x_n)$ est sommable), théorème de comparaison (si $|X| \leq Y$ et $E(Y) < +\infty$ alors $E(X)$ est finie), espérance des lois usuelles, $E(X) = \sum_{n \geq 1} P(X \geq n)$ si $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, linéarité, positivité, croissance, théorème de transfert, espérance d'un produit de variables aléatoires discrètes indépendantes et inégalité de Markov.
5. Variance et écart type, cas des lois usuelles, l'existence de la variance entraîne celle de l'espérance, $V(aX + b) = a^2 V(X)$, inégalité de Bienaymé-Tchebichev et loi faible des grands nombres. Covariance, inégalité de Cauchy-Schwarz et variance d'une somme de variables aléatoires discrètes.
6. Fonction génératrice, le rayon de convergence est ≥ 1 et la série CVN sur $[-1, 1]$, fonctions génératrices des lois usuelles, fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires discrètes indépendantes, X admet une espérance (resp. une variance) si et seulement si G_X est dérivable (resp. deux fois dérivable) en 1, valeurs de $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

À suivre : topologie et applications dans les evn