

Endomorphismes d'un espace euclidien

La notation E désigne un espace euclidien ; le produit scalaire de E est noté $(|)$, la norme associée est notée $\| \|$.

Rappels :

◇ Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E . Pour $(x, y) \in E^2$, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, alors

$$(x|y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = X^T X$$

avec $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$.

◇ Si $(|)$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, (AX|Y) = X^T A^T Y = (X|A^T Y)$$

où on identifie un vecteur x de $\mathbb{R}^n$ et sa matrice X dans la base canonique.

Exemple(s) :

(R.1) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\ker(A)^\perp = \text{Im}(A^T)$ et $\text{Im}(A)^\perp = \ker(A^T)$

(R.2) Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on a $\ker(A) = \ker(A^T A)$ donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T A)$.

I Isométries vectorielles d'un espace euclidien

1. Le groupe orthogonal

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou un *endomorphisme orthogonal*) si u conserve la norme, ie

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$$

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E .

Conséquence [I.1] :

1. Toute isométrie vectorielle est bijective.
2. $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe orthogonal**.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2, \quad u \circ v \in \mathcal{O}(E) \quad \text{et} \quad u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$$

Attention : $\mathcal{O}(E)$ n'est pas stable par addition, ni par produit par un scalaire, donc $\mathcal{O}(E)$ n'est pas un espace vectoriel.

Remarque(s) :

- (I.1) Cela signifie en particulier que toute isométrie vectorielle est un automorphisme de E , on peut donc indifféremment parler d'endomorphisme orthogonal ou d'automorphisme orthogonal.

- (I.2) La réciproque est fautive : il existe des automorphismes de E qui ne sont pas des isométries vectorielles.

Propriété [I.2] : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) u est une isométrie vectorielle.
- ii) u conserve le produit scalaire : $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|u(y)) = (x|y)$.
- iii) u est bijectif et $\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u^{-1}(y))$.
- iv) u transforme une base orthonormale de E en une base orthonormale de E .

Exemple(s) :

- (I.3) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, muni de son produit scalaire canonique, et $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM$. Montrer que φ est une isométrie si et seulement si $A^T A = I_n$.
- (I.4) Étude des symétries orthogonales : on appelle **symétrie orthogonale par rapport à F** la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$. On a donc les propriétés suivantes :
 - a) $s = 2\pi_F - id_E$, si π_F est la projection orthogonale sur E .
 - b) $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si $s^2 = id_E$ et $\ker(s - id_E) \perp \ker(s + id_E)$.
 - c) Si s est une symétrie (ie $s^2 = id_E$) alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si s est une isométrie vectorielle (ie $s \in \mathcal{O}(E)$).
 - d) On appelle **réflexion** toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E . Si H est un hyperplan de E et $e \neq 0$ un vecteur normal à H alors la réflexion par rapport à H est $s_H : x \mapsto x - 2 \frac{(e|x)}{\|e\|^2} e$.
 - e) Si u et v sont deux vecteurs distincts non nuls de E et de même norme alors il existe une unique réflexion s_H telle que $s_H(u) = v$.

Attention : Une projection orthogonale, autre que id_E , n'est pas une isométrie vectorielle.

Propriété [I.3] : Soient u une isométrie vectorielle et F un sous-espace vectoriel de E .

F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u .

Exemple(s) :

- (I.5) Si u est une isométrie de E et e est un vecteur propre de u alors $H = \text{Vect}\{e\}^\perp$ est un hyperplan de E stable par u et l'endomorphisme induit par u sur H est une isométrie de H .

2. Matrices orthogonales

Définition : Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que M est une **matrice orthogonale** si

$$M^T M = I_n$$

On note $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété [I.4] : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) M est orthogonale.
- ii) $MM^T = I_n$
- iii) M est inversible et $M^{-1} = M^T$.
- iv) Les vecteurs colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien.
- v) Les vecteurs lignes de M forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ canoniquement euclidien.

Remarque(s) :

- (I.6) M est orthogonale si et seulement si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique. Cela signifie que $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T M^T M X = X^T X$.

Exemple(s) :

(I.7) Soit $P = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ Calculer son inverse à l'aide de $\frac{1}{3}P$.

Propriété [I.5] : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . Alors on a :

$$u \in \mathcal{O}(E) \text{ si et seulement si } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

Propriété [I.6] : Si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors on a

1. $\det(M) = \pm 1$.
2. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$.

$$\forall (M, N) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})^2, \quad MN \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M^{-1} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

3. $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \det(M) = +1\}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** d'ordre n .

$$\forall (M, N) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})^2, \quad MN \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad M^{-1} \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$$

Attention : $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ ne sont pas des espaces vectoriels : ils ne sont stables ni par addition, ni par produit par un scalaire.

Conséquence [I.7] : Si u est une isométrie vectorielle de E alors $\det(u) = \pm 1$

Remarque(s) :

- (I.8) L'ensemble $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{M \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \det(M) = -1\}$ n'est pas un sous-groupe et si $(M, N) \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})^2$ alors $MN \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- (I.9) On définit de même pour les endomorphismes $\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E), \det(u) = +1\}$. C'est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$ appelé groupe des isométries directes de E .
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $u \in \mathcal{SO}(E)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- (I.10) La réciproque est fautive : il existe des endomorphismes dont le déterminant vaut 1 et qui ne sont pas des isométries.

Propriété [I.8] : Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E et $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Alors on a $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $P^{-1} = P^T$.

Remarque(s) :

- (I.11) On a déjà vu que réciproquement, si $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{B} = (C_1, \dots, C_n)$, la famille des vecteurs colonnes de P , est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique.

Exemple(s) :

- (I.12) Soit $M \in \mathcal{GL}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un couple de matrices (Q, R) tel que $M = QR$, $Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et R soit triangulaire supérieure.

II Espaces euclidiens de dimensions 2 ou 3

1. Orientation d'un espace vectoriel

Définition [II.1] :

1. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un espace euclidien E et $P = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. On dit que les deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si $\det(P) > 0$.
2. Un **espace euclidien orienté** est un espace euclidien E muni d'une base orthonormale $\mathcal{B}_0$. La base $\mathcal{B}_0$ est alors appelée **base orthonormale directe**. Toute base de E ayant la même orientation que $\mathcal{B}_0$ est alors dite directe.
3. Si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, on dit que $\mathcal{B}$ est une **base directe** si $\mathcal{B}$ a la même orientation que la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$, ie si $\det P(\mathcal{B}_c, \mathcal{B}) > 0$.

Remarque(s) :

- (II.1) Si $\mathcal{B}$ est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^n$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}) \in \mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$.
- (II.2) Si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors u est une isométrie directe de E si et seulement si u transforme une base orthonormée de E en une autre base orthonormée de E , de même orientation.
- (II.3) Si (i, j, k) est une base directe de $\mathbb{R}^3$ alors (j, k, i) , (k, i, j) et $(-i, -j, k)$ sont aussi des bases directes alors que (j, i, k) , (i, k, j) , (k, j, i) et $(-i, j, k)$ sont des bases indirectes.

Définition : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et P un plan de E . Si e est un vecteur normal à P , le vecteur e oriente le plan P : on dit qu'une base (u, v) de P est directe si (u, v, e) est une base directe de E .

Remarque(s) :

- (II.4) Cette définition peut se généraliser à un espace euclidien orienté de dimension n : tout vecteur e non nul induit une orientation de l'hyperplan $H = \text{Vect}\{e\}^\perp$.

Définition [II.2] :

1. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 2 et u, v , deux vecteurs de E . Le **produit mixte** de u et v est le réel, noté $[u, v]$, défini par
$$[u, v] = \det_{\mathcal{B}}(u, v)$$
où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de E .
Le produit mixte $[u, v]$ est indépendant du choix de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E .
2. Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et u, v, w , trois vecteurs de E . Le **produit mixte** de u, v et w est le réel, noté $[u, v, w]$, défini par

$$[u, v, w] = \det_{\mathcal{B}}(u, v, w)$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormale directe de E .

Le produit mixte $[u, v, w]$ est indépendant du choix de la base orthonormale directe $\mathcal{B}$ de E .

Remarque(s) :

- (II.5) On peut définir de même le produit mixte d'une famille de n vecteurs dans un espace euclidien orienté de dimension n .
- (II.6) (u, v, w) est une base de E , espace euclidien de dimension 3 orienté, si et seulement si $[u, v, w] \neq 0$.
- (II.7) Si (u, v, w) est une base orthormale directe de E alors $[u, v, w] = 1$ mais la réciproque est fausse.

Propriété [II.3] : Soient $n \in \{2, 3\}$ et E un espace euclidien orienté de dimension n . Le produit mixte de n vecteurs est une forme n -linéaire alternée sur E .

Remarque(s) :

- (II.8) Pour $n = 3$, cela signifie que
- $u \mapsto [u, v, w]$, $v \mapsto [u, v, w]$ et $w \mapsto [u, v, w]$ sont trois formes linéaires.
 - si u, v, w ne sont pas 2 à 2 distincts alors $[u, v, w] = 0$.

Propriété [II.4] : (Interprétation géométrique du produit mixte)

1. Soient $ABCD$ un parallélogramme de $\mathbb{R}^2$. L'aire de $ABCD$ est $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}|$.
2. Soient A, B, C et D quatre points de $\mathbb{R}^3$ et P le parallélépipède dont $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont trois arrêtes. Le volume de P est $|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}|$.

Définition [II.5] : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3, u et v deux vecteurs de E . Il existe un unique vecteur de E , appelé **produit vectoriel** de u et v , noté $u \wedge v$ tel que

$$\forall x \in E, [u, v, x] = (u \wedge v | x)$$

Remarque(s) :

- (II.9) Cette définition se généralise en fait à $n - 1$ vecteurs $u_1, \dots, u_{n-1}$ d'un espace euclidien orienté de dimension n : il existe un unique vecteur w tel que $\forall x \in E, \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_{n-1}, x) = (w | x)$ pour toute base $\mathcal{B}$ orthonormée directe.

Propriété [II.6] : Soient u et v deux vecteurs d'un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E . Si les coordonnées des vecteurs u et v sont $u = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $v = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ alors

$$u \wedge v = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} e_3$$

Propriété [II.7] : (Propriétés du produit vectoriel)

Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. Alors on a les propriétés suivantes :

1. L'application $(u, v) \mapsto u \wedge v$ est une application bilinéaire antisymétrique de E : pour tout $(u, v, w) \in E^3$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha u + \beta v) \wedge w = \alpha(u \wedge w) + \beta(v \wedge w) \quad \text{et} \quad u \wedge (\alpha v + \beta w) = \alpha(u \wedge v) + \beta(u \wedge w)$$

$$u \wedge v = -v \wedge u$$

2. On a $u \wedge v = 0$ si et seulement si u et v sont liés.
3. $u \wedge v$ est un vecteur orthogonal à u et à v .
4. $\|u \wedge v\| \leq \|u\| \times \|v\|$ avec égalité si et seulement si u et v sont orthogonaux.
5. Si u et v sont libres alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base directe de E .

Remarque(s) :

- (II.10) Si u et v sont deux vecteurs de E unitaires et orthogonaux alors $(u, v, u \wedge v)$ est une base orthonormale directe de E .
- (II.11) Plus précisément, si u et v sont orthonormés, $u \wedge v$ est l'unique vecteur de E permettant de compléter (u, v) en une base orthonormée directe.

Exemple(s) :

- (II.12) Montrer que $u \wedge (v \wedge w) = (u | w)v - (u | v)w$; le produit vectoriel n'est donc pas associatif !
- (II.13) Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$, non nul, tel que $\forall (u, v) \in E^2, f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$. Montrer que $f \in \mathcal{O}(E)$; on pourra s'intéresser à l'image d'une base orthonormale de E .
- (II.14) Soit u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, $u \neq 0$. Déterminer les vecteurs x tels que $u \wedge x = v$.

2. Isométries vectorielles d'un plan euclidien orienté

Propriété [II.8] : Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on définit les matrices

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

Alors on a $\mathcal{O}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$, ie

$$M \in \mathcal{O}_2(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } \exists \theta \in \mathbb{R}, M = R(\theta) \text{ ou } M = S(\theta)$$

Propriété [II.9] : On a, pour $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$,

1. $R(\theta)R(\theta') = R(\theta + \theta') = R(\theta')R(\theta)$
On en déduit $R(\theta)^{-1} = R(-\theta)$ et $R(\theta)^n = R(n\theta)$ si $n \in \mathbb{Z}$.
2. $S(\theta)S(\theta') = R(\theta - \theta')$ donc $S(\theta)^2 = I_2$ et $S(\theta)^{-1} = S(\theta)$

Conséquence [II.10] : On a $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{SO}_2(\mathbb{R})$ est un groupe commutatif.

Définition : Soient E un plan euclidien orienté et $r \in \mathcal{L}(E)$. On dit que r est une **rotation de E** si $r \in \mathcal{SO}(E)$, ie si r est une isométrie vectorielle de E telle que $\det(r) = +1$.

$$\forall x \in E, \|r(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \det(r) = +1$$

Théorème [II.11] : Soient E un plan orienté et $r \in \mathcal{L}(E)$. Alors on a équivalence de

- i) r est une rotation de E
- ii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$
- iii) il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Le réel θ est alors appelé **angle de la rotation r** .

Remarque(s) :

(II.15) Cela signifie en particulier que la matrice d'une rotation est la même dans toutes les bases orthonormales directes de E .

Conséquence [II.12] : Si r et r' sont deux rotations d'angles θ et θ' alors $r \circ r'$ est la rotation d'angle $\theta + \theta'$.

Définition [II.13] : Si u et v sont deux vecteurs de E non nuls, on définit l'angle orienté des vecteurs u et v comme étant l'angle de l'unique rotation r de E telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$.

Théorème [II.14] : (Classification des isométries d'un plan euclidien orienté)

Soient E un plan euclidien orienté et $f \in \mathcal{O}(E)$.

1. si $\det(f) = +1$, f est une rotation.
2. si $\det(f) = -1$ alors f est une réflexion (une symétrie orthogonale par rapport à une droite).

3. Isométries vectorielles d'un espace euclidien orienté de dimension 3

Propriété [II.15] : Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors f admet une valeur propre égale à ± 1 .

$$1 \in \text{Sp}(f) \quad \text{ou} \quad -1 \in \text{Sp}(f)$$

Conséquence [II.16] : (Réduction des isométries en base orthonormale)

Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $f \in \mathcal{O}(E)$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E et un réel θ tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Attention : Si l'espace E est orienté, la base $\mathcal{B}$ n'est pas forcément directe.

Définition : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et $r \in \mathcal{L}(E)$. On dit que r est une **rotation** de E si r est une isométrie de E telle que $\det(r) = +1$.

$$\forall x \in E, \|r(x)\| = \|x\| \quad \text{et} \quad \det(r) = +1$$

Théorème [II.17] : Soient E un espace euclidien orienté de dimension 3 et r une rotation de E . Alors il existe une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ orthonormale directe de E telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si $r \neq \text{id}_E$, la droite $D = \text{Vect}\{u\} = \ker(r - \text{id}_E)$ est **l'axe de la rotation** et θ est **l'angle de la rotation**. On dit que r est la rotation d'angle θ autour du vecteur u .

Conséquence [II.18] : Soit r la rotation d'angle θ autour d'un vecteur u . On a

1. $\text{Tr}(r) = 1 + 2 \cos \theta$.
2. Pour tout vecteur x de E , $\sin \theta$ est du même signe que $[u, x, r(x)]$

Attention : Penser à prendre une base orthonormée directe pour déterminer le signe de $\sin \theta$ (et respecter l'ordre des vecteurs dans le produit mixte).

Remarque(s) :

(II.16) L'angle est orienté par le vecteur u : θ est l'angle de la rotation du plan $\text{Vect}\{u\}^\perp$, orienté par le vecteur u .

La rotation autour de u et d'angle θ est aussi la rotation autour de $-u$ et d'angle $-\theta$.

(II.17) Il existe en fait 3 types d'isométries dans un espace euclidien orienté de dimension 3 :

- les réflexions (symétries orthogonales par rapport à un plan) : on a alors $\det(s) = -1$ et la matrice de s est symétrique dans toute base orthonormale de E .

- les rotations : on a alors $\det(r) = +1$
- les symétries rotations : on a alors $\det(f) = -1$ mais la matrice de f dans une base orthonormale n'est pas symétrique. Il existe alors une base $\mathcal{B} = (u, v, w)$ orthonormale directe de E dans laquelle $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$; f est alors la composée, commutative, de la rotation autour de u et d'angle θ et de la réflexion par rapport au plan $\text{Vect}\{v, w\} = \text{Vect}\{u\}^\perp$.

Exemple(s) :

(II.18) Déterminer la nature des endomorphismes canoniquement associés aux matrices $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$;

$$B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -7 & 4 & -4 \\ 4 & -1 & -8 \\ -4 & -8 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & -\sqrt{6} \\ 3 & -1 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

(II.19) Écrire la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, de la rotation autour du vecteur $u = (1, 1, 0)$ et d'angle θ .

(II.20) Soient u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et r la rotation autour de u d'angle θ . Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, on a $r(x) = \cos \theta x + \sin \theta (u \wedge x) + 2(u|x) \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) u$.

III Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien

1. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **autoadjoint** (ou *symétrique*) si

$$\forall (x, y) \in E^2, (u(x)|y) = (x|u(y))$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E .

Propriété [III.1] : Soit p un projecteur de E ($p \circ p = p$). Alors

p est un projecteur orthogonal (ie $\ker(p) \perp \text{Im}(p)$) si et seulement si p est autoadjoint.

Exemple(s) :

(III.1) Si s est une symétrie de E alors s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s \in \mathcal{S}(E)$.

Propriété [III.2] : L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{S}(E), \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha u + \beta v \in \mathcal{S}(E)$$

Attention : $\mathcal{S}(E)$ n'est par contre pas stable par composition.

Propriété [III.3] : Soient E un espace euclidien, u un endomorphisme autoadjoint de E et F un sous-espace de E . Alors

F est stable par u si et seulement si $F^\perp$ est stable par u .

Exemple(s) :

(III.2) Si e est un vecteur propre de u , endomorphisme autoadjoint de E alors $H = \text{Vect}\{e\}^\perp$ est un hyperplan de E , stable par u , sur lequel u induit un endomorphisme autoadjoint de H .

Propriété [III.4] : (Rappel)

1. L'ensemble des matrices symétriques réelles est défini par

$$\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = A^T\}$$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. Si $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = -A^T\}$ est l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ supplémentaire de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors

$$M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + M^T)}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - M^T)}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$$

3. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$
4. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = a_{j,i}$

Remarque(s) :

(III.3) $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} = -a_{j,i}$, on a donc en particulier $a_{i,i} = 0$ donc $\text{Tr}(A) = 0$.

(III.4) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ alors $A^2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(III.5) Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

Attention :

- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ n'est pas stable par produit : si A et B sont symétriques alors AB est symétrique si et seulement si A et B commutent.
- Il existe des matrices symétriques non inversibles.

Propriété [III.5] : Soient E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E . Alors

u est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique

Remarque(s) :

(III.6) Un projecteur (resp. une symétrie) est un projecteur orthogonal (resp. une symétrie orthogonale) si et seulement si sa matrice, dans une base orthonormale, est symétrique.

Théorème [III.6] : (Théorème spectral)

1. **Version géométrique :** Soit u un endomorphisme autoadjoint de E . Alors

- $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{R}$

- $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)}^{\perp} E_{\lambda}(u).$

- Il existe** une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de u , ie u est diagonalisable dans une base orthonormale.

2. **Version matricielle :** Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique réelle, alors

il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telles que $A = PDP^T$.

Remarque(s) :

(III.7) Ce théorème est en fait une équivalence : si $P^T A P$ est diagonale avec $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(III.8) Ce théorème assure que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et que l'on peut imposer que P soit orthogonale mais cela ne signifie pas que toute matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale est obligatoirement orthogonale ; il faut donc préciser que P est orthogonale lorsqu'on applique ce théorème.

(III.9) Ce théorème est utilisé en S2I pour diagonaliser, dans une base orthonormée, la matrice d'inertie.

(III.10) Il existe des matrices symétriques complexes qui ne sont pas diagonalisables : $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$.

Exemple(s) :

(III.11) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale.

2. Endomorphismes autoadjoints positifs

Définition : Soit f un endomorphisme autoadjoint de E

1. On dit que f est **autoadjoint positif** si

$$\forall x \in E, (f(x)|x) \geq 0$$

On note $\mathcal{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E .

2. On dit que f est **autoadjoint défini positif** si

$$\forall x \in E, x \neq 0 \Rightarrow (f(x)|x) > 0$$

On note $\mathcal{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E .

Remarque(s) :

(III.12) On a $\mathcal{S}^{++}(E) \subset \mathcal{S}^+(E) \subset \mathcal{S}(E)$

(III.13) $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ ne sont pas des espaces vectoriels car ils ne sont pas stables par produit par un scalaire ; ils ne sont pas stables non plus par composition.

(III.14) Si $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$ alors $(x, y) \mapsto (f(x)|y)$ permet de définir un autre produit scalaire sur E .

Exemple(s) :

(III.15) Soient $a, b \in E$ euclidien et $f : x \mapsto (a|x)a + (b|x)b$. Vérifier que $f \in \mathcal{S}^+(E)$.

Propriété [III.7] : Soit f un endomorphisme autoadjoint de E . Alors on a les équivalences :

$$f \in \mathcal{S}^+(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^+$$

et

$$f \in \mathcal{S}^{++}(E) \Leftrightarrow \text{Sp}(f) \subset \mathbb{R}^{+*}$$

Remarque(s) :

(III.16) Si π_F est un projecteur orthogonal de E alors $\pi_F \in \mathcal{S}^+(E)$ donc $\forall x \in E, (\pi_F(x)|x) \geq 0$.
Par contre, si $\pi_F \neq id_E$ (ie $F \neq E$) $\pi_F \notin \mathcal{S}^{++}(E)$

(III.17) Si s est une symétrie orthogonale de E , $s \neq id_E$, alors $s \notin \mathcal{S}^+(E)$.

(III.18) $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{GL}(E)$ donc tout endomorphisme autoadjoint défini positif est bijectif.

Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique

1. On dit que A est **symétrique positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X^T A X \geq 0$$

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. On dit que A est **symétrique définie positive** si

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0 \Rightarrow X^T A X > 0$$

On note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Attention : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ne sont pas des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété [III.8] : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E alors $f \in \mathcal{S}^+(E)$ (resp. $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$) si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

Conséquence [III.9] : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = A^T$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$.
2. $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si et seulement si $A = A^T$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

Remarque(s) :

(III.19) $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc toute matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est inversible.

Exemple(s) :

(III.20) On a donc $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$ mais $A \notin \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$.

(III.21) Vérifier que :

- a) Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $M^T A M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$
b) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $M^T A M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

(III.22) Si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.
Si de plus $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors on a $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(III.23) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a équivalence de :

- i) $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*}$)
ii) Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (resp. $B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$) telle que $A = B^T B$.

(III.24) Si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ alors il existe $Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = Q^T Q$ et $B = Q^T \Delta Q$, avec Δ diagonale.

(III.25) Si $M \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors il existe un unique couple de matrices (O, S) tel que $A = OS$ avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(III.26) Si A et B sont symétriques réelles telles que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ et $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\text{Sp}(A+B) \subset \mathbb{R}^+$ (ce qui est faux pour des matrices non symétriques). L'ensemble $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est donc stable par addition.
On a aussi si $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $A+B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(III.27) Toute matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est limite d'une suite de matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.