

Correction du DM15

(CCP PC 2014 maths 1)

Partie I :

- En développant : $P = X^2 - (z_1 + z_2)X + z_1 z_2$ donc $a = -z_1 + z_2$ et $b = z_1 z_2$
- Si $\Delta > 0$ alors z_1 et z_2 sont réels ; si P est stable alors $z_1 + z_2 = -a < 0$ et $z_1 z_2 = b > 0$ donc $a > 0$ et $b > 0$
 - Si $b > 0$ alors z_1 et z_2 sont du même signe (strict) et si $a > 0$ alors $z_1 + z_2 < 0$ donc $z_1 < 0$ et $z_2 < 0$ et P est stable
- Si $\Delta = 0$ alors $P = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2$ donc la seule racine de P est $-\frac{a}{2}$. Si P est stable alors $a > 0$ et $b = \frac{a^2}{2} > 0$.
Réciproquement, si $a > 0$ (alors $b = \frac{a^2}{2} > 0$ aussi) donc $z_1 = z_2 = -\frac{a}{2} < 0$ et P est stable.
- P est un polynôme à coefficients réels.
 - Les racines de P sont $z = \frac{1}{2}(-a \pm i\sqrt{4b - a^2})$ donc P est stable si et seulement si $a > 0$; comme $b > \frac{a^2}{4}$, on aura de toute façon $b > 0$. Ainsi P est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$
- $\mathcal{X}_A = X^2 - X \operatorname{Tr}(A) + \det(A)$
 - On a vu dans les questions précédentes qu'un polynôme de degré 2 de la forme $P = X^2 + aX + b$ est stable si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$ donc $\mathcal{X}_A$ (puis A) est stable si et seulement si $\operatorname{Tr}(A) < 0$ et $(-1)^2 \det(A) > 0$
- $Q = (X + 1)(X + i)(X - i)$
 - $\operatorname{Tr}(B) = -1 < 0$ et $(-1)^3 \det(B) = +1 > 0$.
 - $\operatorname{Re}(i) = 0$ donc Q n'est pas stable et comme $\mathcal{X}_B = Q$, B n'est pas stable

Partie II :

- $x \mapsto Ax$ est linéaire donc continue sur $\mathbb{K}^n$ (de dimension finie) puis, par composition avec la norme (continue car lipschitzienne) $x \mapsto \|Ax\|$ est continue
 - $\mathcal{B}$ est une partie fermée bornée et non vide de $\mathbb{K}^n$, espace de dimension finie et $a \mapsto \|Ax\|$ est continue sur $\mathcal{B}$ donc $\max_{\mathcal{B}} \|Ax\|$ existe, ie $\exists x_0 \in \mathcal{B}, \forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq \|Ax_0\|$
 - Si $x \in \mathcal{B}$ alors $\|I_n x\| = \|x\| = 1$ donc $x \mapsto \|I_n x\|$ est constante sur $\mathcal{B}$ et $\|I_n\| = 1$
 - On vérifie :
 - $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel.
 - $\|A\|$ existe d'après la question précédente.
 - $\|A\| \in \mathbb{R}^+$ car $\|Ax\| \in \mathbb{R}^+$ pour tout $x \in \mathcal{B}$.
 - Si $\|A\| = 0$ alors $\forall x \in \mathcal{B}, \|Ax\| \leq 0$ donc $Ax = 0$ pour tout $x \in \mathcal{B}$. On en déduit $\operatorname{Vect}(\mathcal{B}) \in \ker(A)$ donc $\ker(A) = \mathbb{K}^n$ et $A = 0$.
 - Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathcal{B}$ alors $\|\lambda Ax\| = |\lambda| \times \|Ax\| \leq |\lambda| \times \|A\|$ puis $N\lambda A \leq |\lambda| \times \|A\|$.
Pour $\lambda \neq 0$, on a $\|A\| = \left\| \frac{1}{\lambda}(\lambda A) \right\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \| \lambda A \|$ donc $\| \lambda A \| = |\lambda| \times \|A\|$ pour $\lambda \neq 0$; ce qui reste valable pour $\lambda = 0$ puisque $\|0A\| \leq 0$ donc $\|0A\| = 0$.
 - Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathcal{B}$ alors $\|(A+B)x\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \|A\| + \|B\|$ donc $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$

On en déduit que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

 - Si $x \neq 0$ alors $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{B}$ donc $\left\| A \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \|A\|$, puis $\|Ax\| \leq \|A\| \times \|x\|$ ce qui est aussi valable pour $x = 0$ puisque $A0 = 0$.
 - On a $\|A\| = \|(A-B) + B\| \leq \|A-B\| + \|B\|$ donc $\|A\| - \|B\| \leq \|A-B\|$
Si $x \in \mathcal{B}$ alors $\|ABx\| \leq \|A\| \times \|Bx\| \leq \|A\| \times \|B\|$ donc $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$
- On pose $\lambda = x + iy$ et on a, pour $u \in \mathbb{R}^{+*}$, $\frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} = \frac{\sqrt{(1+ux)^2 + (uy)^2} - 1}{u} \underset{u \rightarrow 0^+}{=} \frac{1 + \frac{1}{2}(2ux) + o(u) - 1}{u}$
donc $\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} = \operatorname{Re}(\lambda)$
- Il suffit de remarquer que si $u > 0$, on a $\mu(A, u) = \frac{u\|u^{-1}I_n + A\| - 1}{u} = \|u^{-1}I_n + A\| - u^{-1}$.

- b) On a, d'après **II.1.f**, $\|u^{-1}I_n + A\| - \|v^{-1}I_n + A\| \leq \|(u^{-1}I_n + A) - (v^{-1}I_n + A)\| = \|(u^{-1} - v^{-1})I_n\|$ donc $\|u^{-1}I_n + A\| - \|v^{-1}I_n + A\| \leq |u^{-1} - v^{-1}| \times \|I_n\| = u^{-1} - v^{-1}$ puis $\mu(A, u) - \mu(A, v) \leq 0$ si $0 < u \leq v$
- c) On a $\|I_n + uA\| \leq \|I_n\| + u\|A\| = 1 + u\|A\|$ donc $\mu(A, u) \leq \|A\|$ si $u > 0$.
De même, $\|I_n + uA\| \geq \|I_n\| - u\|A\| = 1 - u\|A\|$ donc $\mu(A, u) \geq -\|A\|$ si $u > 0$.
- d) D'après **II.2.b**, la fonction $u \mapsto \mu(A, u)$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, minorée par $-\|A\|$ d'après la question précédente, donc $\lim_{u \rightarrow 0^+} \mu(A, u)$ existe
4. a) Il existe $y \neq 0$ tel que $Ay = \lambda y$; il suffit alors de normer le vecteur y : si $x = \frac{y}{\|y\|}$, on a $x \in \mathcal{B}$ et $Ax = \lambda x$
On a alors $\|(I_n + uA)x\| = \|(1 + u\lambda)x\| = |1 + u\lambda|$.
- b) On a $\frac{|1 + u\lambda| - 1}{u} = \frac{\|(I_n + uA)x\| - 1}{u} \leq \mu(A, u)$ si $u > 0$ car, comme $x \in \mathcal{B}$, on a $\|(I_n + uA)x\| \leq \|I_n + uA\|$.
En faisant tendre u vers 0^+ , avec **II.2**, on obtient $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu(A)$
- c) Si $\mu(A) < 0$ alors pour $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$, on a $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu(A) < 0$. Ainsi, si $\mu(A) < 0$ alors A est stable

Partie III :

1. $I_n + uA$ est réelle donc $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = {}^t\bar{X}(I_n + uA)X = {}^t\bar{X}(I_n + u({}^tA + A) + u^2{}^tAA)X$ puis $\|(I_n + uA)x\|_2^2 = \|x\|_2^2 + u({}^t\bar{X}({}^tA + A)X) + u^2{}^t\bar{X}{}^tAA X$
2. $A + {}^tA$ est symétrique réelle, il suffit ensuite de la diagonaliser en ordonnant ses valeurs propres dans l'ordre croissant
3. a) M est réelle donc $\sum_{i=1}^n |y_i|^2 = {}^t\bar{Y}Y = {}^t\bar{X}M^tMX = \|x\|_2^2$ car $M^tM = I_n$ donc $\|y\|_2 = 1$
- b) Comme $X = MY$, on vérifie ${}^t\bar{X}({}^tA + A)X = {}^t\bar{Y}^tM({}^tA + A)MY = {}^t\bar{Y}\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i|^2$; il suffit alors de reporter dans l'égalité de **III.1**.
- c) L'application $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})^2 \mapsto {}^tX {}^tAA Y$ est bilinéaire donc continue (dimension finie); de plus $X \mapsto \bar{X}$ est continue car $\|\bar{X} - \bar{Y}\|_2 = \|X - Y\|_2$. On en déduit que φ est continue sur $\mathbb{C}^n$. De plus $\mathcal{B}_2$ est une partie fermée bornée non vide de $\mathbb{C}^n$ donc φ est bornée sur $\mathcal{B}_2$, ce qui donne l'existence de γ et δ .
- d) Comme $u^2 \geq 0$, on déduit de **III.3.b**, $\|(I_n + uA)x\|_2^2 \leq 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i|^2 + \delta u^2 \leq 1 + u\alpha_1 \|y\|_2^2 + \delta u^2 = 1 + \alpha_1 u + \delta u^2$;
ceci étant vrai pour tout $x \in \mathcal{B}_2$, on en déduit $\|I_n + uA\|^2 \leq 1 + \alpha_1 u + \delta u^2$.
De l'autre côté, on prouve aussi $\|I_n + uA\| \geq \|(I_n + uA)x\|_2 \geq 1 + \alpha_1 |y_1|^2 + \gamma u^2$ pour tout $x \in \mathcal{B}_2$ et en choisissant x tel que $y_1 = 1$ (par exemple $x = Me_1$), on en déduit l'autre inégalité. On a donc bien $\sqrt{1 + \alpha_1 u + \gamma u^2} \leq \|I_n + uA\| \leq \sqrt{1 + \alpha_1 u + \delta u^2}$
- e) $\frac{\sqrt{1 + \alpha_1 u + \varepsilon u^2} - 1}{u} \underset{u \rightarrow 0}{=} \frac{1 + \frac{\alpha_1}{2}u + o(u) - 1}{1} \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{\alpha_1}{2}$ donc par encadrement, on trouve $\mu_2(A) = \frac{\alpha_1}{2}$
4. a) On vérifie :
— $\mathbb{C}^2$ est un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
— $\|x\|_H$ existe car $Hx \in \mathbb{C}^n$ et $\|\cdot\|_2$ est définie sur $\mathbb{C}^n$.
— $\|\cdot\|_2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $\|\cdot\|_H$ aussi.
— Si $\|x\|_H = 0$ alors $Hx = 0$ donc $x = 0$ car H est inversible.
— $\|\lambda x\|_H = \|\lambda HX\|_2 = |\lambda| \times \|HX\|_2 = |\lambda| \times \|x\|_H$.
— $\|x + y\|_H = \|H(x + y)\|_2 \leq \|Hx\|_2 + \|Hy\|_2 = \|x\|_H + \|y\|_H$.
donc $\|\cdot\|_H$ est une norme sur $\mathbb{C}^n$
- b) Si $\|x\|_H = 1$ on a $\|Ax\|_H = \|HAx\|_2 = \|HAH^{-1}(HX)\|_2 \leq \|HAH^{-1}\|_2 \times \|Hx\|_2 = \|HAH^{-1}\|_2 \times \|x\|_H \leq \|HAH^{-1}\|_2$ donc $\|A\|_H \leq \|HAH^{-1}\|_2$. En refaisant le même calcul, avec $\|x\|_2 = 1$ et $\|HAH^{-1}x\|_2 = \|A(H^{-1}x)\|_H$, on trouve l'autre inégalité. On en déduit $\|A\|_H = \|HAH^{-1}\|_2$
- c) On en déduit $\mu_H(A, u) = \mu_2(A, u)$ et en faisant tendre u vers 0 , $\mu_H(A) = \mu_2(HAH^{-1})$

Partie IV :

1. Il suffit de développer le polynôme $(X - z_1)(X - z_2)(X - z_3)$ et d'identifier les coefficients comme à la question **I.1**.
2. P est continu sur $\mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} P = -\infty$ et $\lim_{+\infty} P = +\infty$ donc d'après le TVI, P possède une racine réelle
- On peut aussi dire que si λ est non réelle alors $\bar{\lambda}$ est aussi une racine de P ayant la même multiplicité que λ et comme P est de degré 3, il y a donc au moins une racine réelle.

3. a) Si $\beta_3 \neq 0$ alors $z_3 \notin \mathbb{R}$ donc $\overline{z_3}$ est aussi une racine de P ; comme z_1 et z_2 sont réels, c'est absurde donc $z_3 \in \mathbb{R}$
 b) Si P est stable alors les trois racines de P sont des réels < 0 . On a donc avec les relations de **IV.1**, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ et $ab - c > 0$ donc P vérifie $\mathcal{H}$
 4. a) z_2 est complexe non réel et z_1 est réel donc $z_3 = \overline{z_2}$
 b) Il suffit de remplacer dans les relations de **IV.1**.
 c) Si P est stable, les α_i sont < 0 donc on vérifie facilement $\mathcal{H}$.
 5. Si P vérifie $\mathcal{H}$ alors $c > 0$ donc les racines de P sont non nulles et $\alpha_1 = z_1 < 0$. Si $\alpha_2 = 0$ alors z_2 n'est pas réel et $z_3 = \overline{z_2}$ donc $\alpha_3 = 0$ et $\beta_3 = -\beta_2 \neq 0$. On peut réutiliser les relations de **IV.4.b**, ce qui donnerait $ab - c = 0$, ce qui est absurde.
 6. a) Facile

b) On trouve $B' = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{c'} & 0 \\ -\sqrt{c'} & 0 & \sqrt{b'} \\ 0 & -\sqrt{b'} & -a' \end{pmatrix}$ ce qui donne bien le résultat annoncé.

- c) D'après **III.4.c**, on a $\mu_H(A') = \mu_2(HA'H^{-1}) = \mu_2(B')$ puis, d'après **III.3.e**, $\mu_2(B') = \max \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}} \left(\frac{B' + {}^t B'}{2} \right) = 0$ donc $\mu_H(A') = 0$
 d) D'après la partie **II** cette fois, appliquée avec la norme $\|\cdot\|_H$, on a, pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(A')$, $\operatorname{Re}(\lambda) \leq \mu_H(A') = 0$. Comme $P = \mathcal{X}_{A'}$, si λ est une racine de P , on a $\operatorname{Re}(\lambda) \leq 0$ et comme on a déjà vérifié à la question **IV.5** que $\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$, on en déduit $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Ainsi P vérifie $\mathcal{H}$ alors P est stable

On vient donc en fait de vérifier que P est stable si et seulement si P vérifie $\mathcal{H}$, dans le cas où P est un polynôme de degré 3.