

Exercice 1 (TPE EIVP PSI 2019)

Soit $S = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^2 = I_3\}$

1. S est-il un espace vectoriel ?
2. S est-il stable par produit ?
3. S est-il fermé ? (*)
4. S est-il borné ? (*)

Exercice 2 (Centrale PSI 2024)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que P n'admet aucune racine complexe et on définit, pour $r \in \mathbb{R}^+$, $I(r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

1. Montrer que I est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. (*)
2. Montrer que I est constante sur $\mathbb{R}^+$.
3. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall (r, \theta) \in [k, +\infty[\times [0, 2\pi], \left| \frac{1}{P(re^{i\theta})} \right| < \varepsilon$ (*) puis conclure.

Exercice 3

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

$$f_1(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2} \quad ; \quad f_2(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad ; \quad f_3(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x \quad ; \quad f_4(x, y) = x^y$$

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2023)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on note $\varphi(f) : x \mapsto \int_0^x tf(t) dt$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_\infty \leq k \|f\|_\infty$. (*)
3. Trouver le plus petit $k > 0$ tel que : $\forall f \in E, \|\varphi(f)\|_\infty \leq k \|f\|_1$. (*)

Exercice 5 (Centrale PSI 2023)

Soient $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ et φ une forme linéaire sur E . On pose $N = \sup\{|\varphi(f)|, f \in E, \|f\|_\infty \leq 1\}$

1. Justifier que N existe si et seulement si φ est continue.
2. Que vaut N si $\varphi(f) = \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt$?
3. Existe-t-il $f \in E$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ et $|\varphi(f)| = N$?

Exercice 6 (Centrale PSI 2022)

Soient $n \geq 2$ et (M_k) une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui converge vers une matrice M . On suppose que toutes les matrices M sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. M est-elle diagonalisable ? (*)
2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire et de degré d . Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$. (*)
3. Montrer que M est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. (*)

Indications

Exercice 1

3. On peut le faire en vérifiant que $A \mapsto A^2$ est continue par exemple.
4. La réponse est non.

Exercice 2

1. Utiliser le théorème des bornes atteintes pour la domination.
3. Utiliser un équivalent de $|P(z)|$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4

2. Après avoir trouvé une majoration avec une constante k , chercher si une fonction non nulle peut réaliser l'égalité.
3. Introduire une suite pour « approcher » la fonction qui réaliserait l'égalité

Exercice 6

1. Vue la suite non : trouver une suite de matrices diagonalisables qui converge vers une matrice nilpotente non nulle par exemple.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Vérifier que, pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé, l'application $M \mapsto \mathcal{X}_M(\lambda)$ est continue.