
ENAC – 2025 – PHYSIQUE – CORRIGÉ

Corrigé proposé par Charles-Édouard LECOMTE. Relu attentivement par Matthieu QUÉVAL.

Partie 1 : Cinématique d'un mouvement en spirale

1. La composante radiale du vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}(t)$ est $r(t)$. Sa valeur initiale est r_0 . t_1 vérifie donc l'équation :

$$r(t_1) = \frac{r_0}{10}$$

On isole t_1 :

$$r_0 \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = \frac{r_0}{10} \quad \Leftrightarrow \quad \exp\left(-\frac{t_1}{\tau}\right) = \frac{1}{10} \quad \Leftrightarrow \quad t_1 = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{t_1 = \tau \ln(10)} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

2. En coordonnées polaires, la vitesse est :

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\theta}(t)\vec{e}_\theta$$

Ainsi :

$$\boxed{v_r(t) = \dot{r}(t) = -\frac{r_0}{\tau}e^{-t/\tau}}$$

et :

$$\boxed{v_\theta(t) = r(t)\dot{\theta}(t) = r_0\Omega e^{-t/\tau}} \quad \text{réponses } \boxed{\text{b}} \text{ et } \boxed{\text{c}}$$

3. En coordonnées polaires, la vitesse est :

$$\vec{v}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t)\right)\vec{e}_\theta$$

Ainsi :

$$a_r(t) = \ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}(t)^2 = \frac{r_0}{\tau^2}e^{-t/\tau} - r_0\Omega^2 e^{-t/\tau}$$

Soit :

$$\boxed{a_r(t) = r_0\left(\frac{1}{\tau^2} - \Omega^2\right)e^{-t/\tau}}$$

puis :

$$a_\theta(t) = 2\dot{r}(t)\dot{\theta}(t) + r(t)\ddot{\theta}(t) = -\frac{2r_0}{\tau}\Omega e^{-t/\tau} + 0$$

$$\boxed{a_\theta(t) = -\frac{2r_0\Omega}{\tau}e^{-t/\tau}} \quad \text{réponses } \boxed{\text{a}} \text{ et } \boxed{\text{d}}$$

4. La norme de la vitesse est :

$$\begin{aligned} v = \|\vec{v}\| &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} \\ &= \sqrt{\frac{r_0^2}{\tau^2} (e^{-t/\tau})^2 + r_0^2\Omega^2 (e^{-t/\tau})^2} \end{aligned}$$

Soit :

$$v = r_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2}$$

Celle de l'accélération est :

$$\begin{aligned} a = \|\vec{a}\| &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \\ &= \sqrt{r_0^2 (e^{-t/\tau})^2 \left(\frac{1}{\tau^2} - \Omega^2\right)^2 + \frac{4r_0^2 \Omega^2}{\tau^2} (e^{-t/\tau})^2} \\ &= r_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\left(\frac{1}{\tau^2} - \Omega^2\right)^2 + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}} \\ &= r_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\frac{1}{\tau^4} + \Omega^4 - \frac{2\Omega^2}{\tau^2} + \frac{4\Omega^2}{\tau^2}} \\ &= r_0 e^{-t/\tau} \sqrt{\frac{1}{\tau^4} + \Omega^4 + \frac{2\Omega^2}{\tau^2}} \end{aligned}$$

Soit :

$$a = r_0 e^{-t/\tau} \left(\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2\right) \quad \text{réponses } \boxed{\text{b}} \text{ et } \boxed{\text{c}}$$

5. Le rapport a/v vaut alors :

$$\frac{a}{v} = \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2} = 0,5 \text{ s}^{-1} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

6. On peut obtenir α *via* le produit scalaire. D'une part, via les coordonnées, comme $\overrightarrow{\text{OM}}(t) = r(t)\vec{e}_r$:

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) \cdot \vec{v}(t) = r(t) \times v_r(t) + 0 \times v_\theta(t) = -\frac{1}{\tau} (r_0 e^{-t/\tau})^2$$

D'autre part :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) \cdot \vec{v}(t) = \|\overrightarrow{\text{OM}}(t)\| \times \|\vec{v}(t)\| \times \cos(\alpha) = r(t)v(t) \cos \alpha = (r_0 e^{-t/\tau})^2 \sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2} \cos \alpha$$

Ainsi :

$$\cos \alpha = \frac{-1/\tau}{\sqrt{\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2}}$$

Soit :

$$\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{1 + \Omega^2 \tau^2}} = -0,8 \quad \text{réponses } \boxed{\text{c}} \text{ et } \boxed{\text{d}}$$

Partie 2 : Système afocal

7. Le système est afocal : l'image d'un objet à l'infini est une image à l'infini. Or l'image d'un objet à l'infini est dans le plan focal image de $\mathcal{L}_1$ et, si l'image finale est à l'infini, l'image intermédiaire est dans le plan focal objet de $\mathcal{L}_2$. On a donc :

$$F'_1 = F_2$$

Par ailleurs, la lentille $\mathcal{L}_1$ précède la lentille $\mathcal{L}_2$ donc $d = \overline{\text{O}_1 \text{O}_2} > 0$. Or :

$$d = \overline{\text{O}_1 F'_1} + \overline{F'_1 \text{O}_2} = \overline{\text{O}_1 F'_1} + \overline{F_2 \text{O}_2} = f'_1 + f'_2$$

D'où :

$$f'_2 > -f'_1$$

Comme $f'_2 > 0$ et $f'_1 < 0$, on trouve :

$$\frac{1}{f'_2} < -\frac{1}{f'_1}$$

Soit :

$$V_2 < -V_1 \quad \text{ou} \quad \boxed{V_2 < |V_1|} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{V_1 < -V_2} \quad \text{réponse } \boxed{\text{c}}$$

8. On a vu que $d = f'_1 + f'_2$. Soit, avec $f'_k = 1/V_k$:

$$\boxed{d = \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} \right)} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

9. Fixons les notations : notons $\overline{AB}$ l'objet, $\overline{A_1B_1}$ l'image de $\overline{AB}$ par $\mathcal{L}_1$ et $\overline{A'B'}$ l'image finale (l'image de $\overline{A_1B_1}$ par $\mathcal{L}_2$). D'après la relation de Newton :

$$\overline{F_1A} \times \overline{F'_1A_1} = -f_1'^2 \quad \text{et} \quad \overline{F_2A_1} \times \overline{F'_2A'} = -f_2'^2$$

Comme $F'_1 = F_2$, $\overline{F'_1A_1} = \overline{F_2A_1}$; le quotient des deux formules de conjugaison donne :

$$\frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F_1A}} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2}$$

On définit les grandissements transversaux pour $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, et on utilise la formule du grandissement aux foyers :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{f'_1}{\overline{F_1A}} \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1B_1}} = -\frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F_1A}}$$

Ainsi :

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f'_1}{f'_2} \frac{\overline{F'_2A'}}{\overline{F_1A}} = -\frac{f'_2}{f'_1} = \left| \frac{f'_2}{f'_1} \right|$$

L'image est plus grande ($|\gamma| > 1$) et à l'endroit ($\gamma > 0$).

Pas de réponse juste : réponse e)

10. Par définition de D, et en utilisant le fait que $F'_1 = F_2$, on a de même, comme à la question précédente :

$$\frac{\overline{F'_2D}}{\overline{F_1D}} = \frac{f_2'^2}{f_1'^2}$$

Or :

$$\overline{F'_2D} = \overline{F'_2O_2} + \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F_1} + \overline{F_1D} = -f'_2 - d - f'_1 + \overline{F_1D}$$

Ainsi :

$$f_1'^2 \times (-2(f'_1 + f'_2)) + f_1'^2 \overline{F_1D} = f_2'^2 \overline{F_1D}$$

Ainsi :

$$\overline{F_1D} = \frac{-2f_1'^2(f'_1 + f'_2)}{f_2'^2 - f_1'^2}$$

$$\boxed{\overline{F_1D} = -\frac{2f_1'^2}{f_2' - f_1'}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{d}}$$

11. On exprime $\overline{O_1D}$:

$$\begin{aligned} \overline{O_1D} &= \overline{O_1F_1} + \overline{F_1D} = -f'_1 - \frac{2f_1'^2}{f_2' - f_1'} \\ &= \frac{-f'_1 f'_2 + f_1'^2 - 2f_1'^2}{f_2' - f_1'} \\ &= \frac{-f'_1 f'_2 - f_1'^2}{f_2' - f_1'} = -f'_1 \frac{f'_2 + f'_1}{f_2' - f_1'} \end{aligned}$$

et $\overline{O_2D}$:

$$\begin{aligned}\overline{O_2D} &= \overline{O_2F'_2} + \overline{F'_2D} = f'_2 + \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \overline{F_1D} \\ &= f'_2 - \frac{f_2'^2}{f_1'^2} \frac{2f_1'}{f_2' - f_1'} \\ &= f'_2 - \frac{2f_2'^2}{f_2' - f_1'} \\ &= \frac{f_2'^2 - f_1'f_2' - 2f_2'^2}{f_2' - f_1'} = -f'_2 \frac{f_2' + f_1'}{f_2' - f_1'}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{\overline{O_2D}}{\overline{O_1D}} = \frac{f'_2}{f'_1}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{a}}$$

12. D'après la formule obtenue ci-dessous pour $\overline{O_1D}$, comme $-f'_1 > 0$, $f'_1 + f'_2 = d > 0$ et $f'_2 - f'_1 = f'_2 + |f'_1| > 0$, $\overline{O_1D}$ est virtuel. Par ailleurs, on a établi à la question 9 que :

$$\gamma_1 \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{f'_2}{f'_1}$$

Pour $A' = A = D$, on a :

$$\boxed{\frac{\overline{DB'}}{\overline{DB}} = -\frac{f'_2}{f'_1}} \quad \text{réponses } \boxed{\text{b}}$$

On pourrait éventuellement cocher la réponse d) car son énoncé est ambigu : $\overline{O_1D} < 0$: l'objet est virtuel : on ne peut placer physiquement l'objet en D, et D est bien entre les deux lentilles.

Partie 3 : Électrocinétique des régimes transitoires

13. À $t = 0^+$, l'interrupteur K_1 est fermé, ainsi :

$$E = u_R(0^+) + u_1(0^+) + u_2(0^+)$$

Or la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue, ainsi $u_1(0^+) = u_1(0^-) = E/2$ et $u_2(0^+) = u_2(0^-) = 0$. D'où :

$$\boxed{u_R(0^+) = \frac{E}{2}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

14. L'interrupteur K_2 étant ouvert, le courant traversant les deux condensateurs est le même :

$$i_1 = C_1 \frac{du_1}{dt} = C_2 \frac{du_2}{dt}$$

D'après la loi des mailles :

$$E = Ri_1 + u_1 + u_2$$

On dérive :

$$0 = R \frac{di_1}{dt} + \frac{du_1}{dt} + \frac{du_2}{dt} = R \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2}$$

Ainsi :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{C_1 + C_2}{RC_1C_2} i_1 = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$i_1(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$$

Or $i_1(0^+) = u_R(0^+) / R = E / (2R)$ d'où :

$$i_1(t) = \frac{E}{2R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{RC_1C_2}{C_1 + C_2}$$

réponses ☐ b et ☐ c

15. D'après la relation courant-tension du condensateur :

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{E}{2RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Soit :

$$u_1(t) = B - \frac{E\tau}{2RC_1} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = B - \frac{EC_2}{2(C_1 + C_2)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Or $u_1(0) = E/2$ et $u_1(0) = B - \frac{EC_2}{2(C_1 + C_2)}$. Ainsi :

$$u_1(t) = \frac{EC_2}{2(C_1 + C_2)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] + \frac{E}{2}$$

réponse ☐ d

16. On procède de même : d'après la relation courant-tension du condensateur :

$$\frac{du_2}{dt} = \frac{E}{2RC_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Soit :

$$u_2(t) = B' - \frac{E\tau}{2RC_2} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = B' - \frac{EC_1}{2(C_1 + C_2)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Or $u_2(0) = 0$ et $u_2(0) = B' - \frac{EC_1}{2(C_1 + C_2)}$. Ainsi :

$$u_2(t) = \frac{EC_1}{2(C_1 + C_2)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]$$

réponse ☐ b

17. On a, longtemps après la fermeture de l'interrupteur K_1 (on considère la nouvelle origine temporelle) :

$$u_2(0^-) = \frac{EC_1}{2(C_1 + C_2)}$$

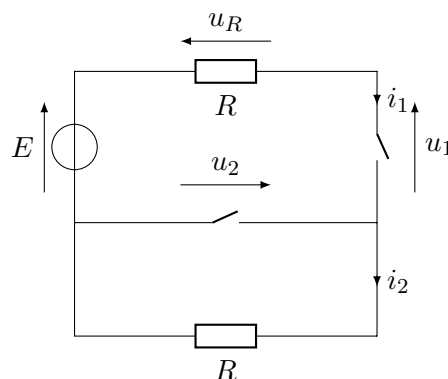
La tension aux bornes du condensateur est une fonction continue donc :

$$u_2(0^+) = \frac{EC_1}{2(C_1 + C_2)}$$

L'interrupteur K_2 étant fermé, $u_2 = Ri_2$ d'où :

$$i_2(0^+) = \frac{EC_1}{2R(C_1 + C_2)}$$

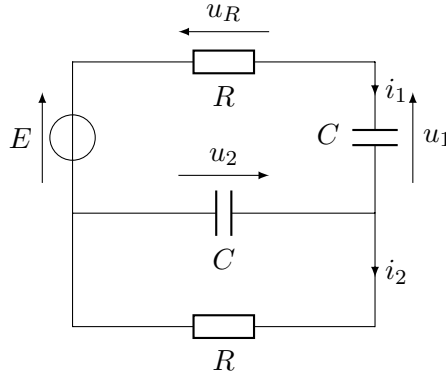
En régime permanent, les condensateurs se comportent comme un interrupteur ouvert, le circuit est alors équivalent à :



Le courant traversant les deux condensateurs sont nuls, donc, d'après la loi des nœuds, **le courant i_2 est nul.**

réponses ☐ a et ☐ d

18. Quand K_2 est fermé, le circuit est :



On écrit la loi des nœuds et le fonctionnement des dipôles :

$$i_1 = \frac{u_2}{R} + C \frac{du_2}{dt}$$

Or, d'après la loi des mailles :

$$E = Ri_1 + u_1 + u_2$$

Donc :

$$E = R \frac{u_2}{R} + RC \frac{du_2}{dt} + u_1 + u_2 = 2u_2 + RC \frac{du_2}{dt} + u_1$$

Dérivons cette expression :

$$0 = 2 \frac{du_2}{dt} + RC \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{du_1}{dt}$$

Or :

$$\frac{du_1}{dt} = \frac{i_1}{C} = \frac{u_2}{RC} + \frac{du_2}{dt}$$

Donc :

$$0 = 3 \frac{du_2}{dt} + RC \frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{u_2}{RC}$$

Ou encore :

$$\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{3}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{(RC)^2} u_2 = 0$$

On identifie les préfacteurs devant u_2 et $\frac{du_1}{dt}$ dans l'équation différentielle :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC}$$

Ainsi $\omega_0 = 1/(RC)$ d'où :

$$Q = \frac{1}{3}$$

réponse ☐ a

Partie 4 : Relation entre capacités thermiques

19. Pour un gaz parfait, C_V est indépendant de la température donc :

$$\Delta_A^B U = C_V (T_B - T_A)$$

La transformation $B \rightarrow C$ étant isotherme, $T_B - T_A = T_C - T_A = \Delta T$ d'où :

$$\Delta_A^B U = C_V \Delta T$$

réponse ☐ c

20. La transformation $B \rightarrow C$ est réversible donc :

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} P dV$$

Elle est isotherme donc :

$$W_{BC} = - \int_{V_B}^{V_C} \frac{nRT_C}{V} dV = -nRT_C \int_{V_B}^{V_C} \frac{dV}{V}$$

Ainsi :

$$W_{BC} = -nRT_C [\ln(V)]_{V_B}^{V_C} = -nRT_C (\ln(V_C) - \ln(V_B))$$

D'où, comme $V_B = V_A$:

$$\boxed{W_{BC} = -nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_A}\right)} \quad \text{réponse } \boxed{\text{a}}$$

21. On a d'une part :

$$nRT_C = nR(T_A + \Delta T) = nRT_A \left(1 + \frac{\Delta T}{T_A}\right) = P_A V_A \left(1 + \frac{\Delta T}{T_A}\right)$$

et d'autre part :

$$\frac{V_C}{V_A} = \frac{V_A + \Delta V}{V_A} = 1 + \frac{\Delta V}{V_A}$$

D'où :

$$\boxed{W_{BC} = -P_A V_A \left(1 + \frac{\Delta T}{T_A}\right) \ln\left(1 + \frac{\Delta V}{V_A}\right)} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

22. La transformation $B \rightarrow C$ est isotherme donc $\Delta_B^C U = 0$ d'où, d'après le premier principe :

$$\boxed{Q_{BC} = -W_{BC}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

Les autres propositions sont fausses tant que $\Delta V \neq 0$.

23. La transformation $C \rightarrow A$ est isobare donc :

$$\boxed{Q_{CA} = C_P (T_A - T_C) = -C_P \Delta T}$$

Le travail reçu est :

$$W_{CA} = - \int_{V_C}^{V_A} P_A dV = -P_A (V_A - V_C) = P_A (V_C - V_A)$$

Soit :

$$\boxed{W_{CA} = P_A \Delta V} \quad \text{réponses } \boxed{\text{b}} \text{ et } \boxed{\text{c}}$$

24. On a :

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V_C - V_A}{T_C - T_A}$$

Comme la transformation $C \rightarrow A$ est isobare, on peut écrire :

$$\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{P_C V_C - P_A V_A}{T_C - T_A} = \frac{nRT_C - nRT_A}{P_A (T_C - T_A)} = \frac{nR}{P_A}$$

Soit :

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta T} = \frac{V_A}{T_A}}$$

Puis :

$$C_P - C_V = nR = \frac{P_A V_A}{T_A}$$

Soit :

$$\boxed{C_P - C_V = P_A \frac{\Delta V}{\Delta T}} \quad \text{réponses } \boxed{\text{b}} \text{ et } \boxed{\text{c}}$$

Partie 5 : Oscillations d'un cadre métallique

25. Le poids s'applique au centre de gravité. On note H le projeté orthogonal du centre de gravité G sur l'axe Δ . On a :

$$\overrightarrow{HG} = \frac{\ell}{2} \sin \theta \vec{e}_x - \frac{\ell}{2} \cos \theta \vec{e}_y$$

et $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$ donc :

$$\overrightarrow{HG} \wedge \vec{P} = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta \vec{e}_z$$

D'où le moment du poids par rapport à l'axe Δ :

$$\Gamma_P = (\overrightarrow{HG} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

26. La force de Laplace exercée sur le côté OA est :

$$\overrightarrow{F_{OA}} = I\ell (-\cos \theta \vec{e}_y + \sin \theta \vec{e}_x) \wedge B\vec{e}_x = I\ell B \cos \theta \vec{e}_z$$

Cette force est parallèle à l'axe de rotation donc son moment est nul. Ensuite, la force de Laplace exercée sur le côté AD est :

$$\overrightarrow{F_{AD}} = -IL\vec{e}_z \wedge B\vec{e}_x = -ILB\vec{e}_y$$

Cette force s'applique au milieu du fil, le projeté orthogonal de son point d'application M sur l'axe de rotation est H et on a :

$$\overrightarrow{HM} = \ell \sin \theta \vec{e}_x - \ell \cos \theta \vec{e}_y$$

donc :

$$\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{F_{AD}} = -I\ell LB \sin \theta \vec{e}_z$$

D'où le moment de cette force par rapport à l'axe Δ :

$$(\overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{F_{AD}}) \cdot \vec{e}_z = -I\ell LB \sin \theta$$

La force de Laplace exercée sur le côté DC est selon $\vec{e}_z$ (comme celle exercée sur le côté OA) : son moment est nul. Enfin, la force de Laplace exercée sur le côté CO s'exerce en un point de l'axe de rotation : son moment est nul. Il reste :

$$\Gamma_L = -I\ell LB \sin \theta \quad \text{réponse } \boxed{\text{c}}$$

27. D'après le théorème du moment cinétique, comme la liaison maintenant le cadre est un pivot parfait :

$$J_z \ddot{\theta} = \Gamma_P + \Gamma_L = -\frac{mg\ell}{2} \sin \theta - I\ell LB \sin \theta$$

Les positions angulaires d'équilibre correspondent à $\Gamma_P + \Gamma_L = 0$ soit $\sin \theta = 0$. D'où :

$$\boxed{\theta_e = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_e = \pi} \quad \text{réponses } \boxed{\text{a}} \text{ et } \boxed{\text{b}}$$

28. Au voisinage de la position d'équilibre stable $\theta_e = 0$, c'est-à-dire aux petits angles ($\sin \theta \approx \theta$), l'équation ci-dessus se réécrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{2I\ell LB + mg\ell}{2J_z} \theta = 0$$

On identifie la pulsation propre des oscillations telle que :

$$\omega_0^2 = \frac{2I\ell LB + mg\ell}{2J_z}$$

D'où la période propre des oscillations :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \left(\frac{8\pi^2 J_z}{mg\ell + 2I\ell LB} \right)^{1/2} \quad \text{réponse } \boxed{\text{c}}$$

29. On établit l'intégrale première du mouvement :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

On primitive :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \cos \theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z} \cos \theta(0) = \frac{1}{2}\dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z}$$

On cherche $\dot{\theta} = 0$ pour $\theta = \pi/2$ soit :

$$0 - 0 = \frac{1}{2}\dot{\theta}(0)^2 - \frac{2IL\ell B + mg\ell}{2J_z}$$

D'où :

$$\dot{\theta}(0) = \left(\frac{mg\ell + 2IL\ell B}{J_z} \right)^{1/2} \quad \text{réponse } \boxed{\text{d}}$$

30. En l'absence de champ magnétique :

$$\ddot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_z} \sin \theta = 0$$

On établit là encore l'intégrale première du mouvement :

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} + \frac{mg\ell}{2J_z} \sin \theta \dot{\theta} = 0$$

On primitive :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{mg\ell}{2J_z} \cos \theta = \frac{1}{2}\dot{\theta}(0)^2 - \frac{mg\ell}{2J_z} \cos \theta(0) = \frac{3mg\ell}{2J_z} - \frac{mg\ell}{2J_z} = \frac{mg\ell}{J_z}$$

La vitesse angulaire est minimale quand $\theta = \pi$, ce qui correspond à :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}_m^2 = \frac{mg\ell}{J_z} + \frac{mg\ell}{2J_z} \cos(\pi) = \frac{mg\ell}{2J_z}$$

D'où :

$$\dot{\theta}_m = \left(\frac{mg\ell}{J_z} \right)^{1/2} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

Partie 6 : Filtres

31. La résistance R et le condensateur C sont en série ; d'après le point diviseur de tension :

$$\underline{u}_{\text{AM}} = \frac{1/(jC\omega)}{R + 1/(jC\omega)} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Ainsi :

$$\underline{H}_1 = \frac{\underline{u}_{\text{AM}}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \quad \text{réponse } \boxed{\text{a}}$$

32. De même, la résistance R' et le condensateur C' sont en série ; d'après le point diviseur de tension :

$$\underline{u}_{\text{BM}} = \frac{R'}{R' + 1/(jC'\omega)} \underline{e} = \frac{2R}{2R + 2/(jC'\omega)} \underline{e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Ainsi :

$$\underline{H}_2 = \frac{\underline{u}_{\text{BM}}}{\underline{e}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} \quad \text{réponse } \boxed{\text{d}}$$

33. On a :

$$u_{AB} = V_A - V_B = V_A - V_M + V_M - V_B = u_{AM} - u_{BM}$$

Ainsi, après passage en complexe et division par $\underline{e}$:

$$\underline{H} = \underline{H}_1 - \underline{H}_2$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{b}}$$

34. À basse fréquence, $RC\omega \ll 1$ donc $\underline{H} = 1$. À haute fréquence, $RC\omega \gg 1$ donc $\underline{H} = \frac{-jRC\omega}{jRC\omega} = -1$. Ainsi, **les basses et les hautes fréquences passent**. Le filtre n'est jamais intégrateur.

Le choix de la case à cocher est ambigu : un filtre déphaseur peut-il être considéré passe-haut et passe-bas. La plupart des définitions d'un filtre passe-bas mentionne l'atténuation des hautes fréquences (en plus de laisser passer les basses fréquences).

réponse $\boxed{\text{e}}$

35. D'après ce qui précède, $\varphi(\omega)$ étant l'argument de $\underline{H}$, le déphasage est nul à basse fréquence et vaut $\pm\pi$ à haute fréquence. Remarquons qu'en $\omega = 1/(RC)$:

$$\underline{H} \left(\frac{1}{RC} \right) = \frac{1 - j}{1 + j} = \frac{(1 - j)^2}{2} = \frac{1 + j^2 - 2j}{2} = -j$$

ce qui correspond à un déphasage de $-\pi/2$.

réponse $\boxed{\text{c}}$

36. $\underline{H}_1$, $\underline{H}_2$ et $\underline{H}$ ne sont pas affectés par l'ajout de cette branche (les dipôles R et C , ainsi que R' et C' restent en série), on a alors :

$$\boxed{\underline{H}'_1 = \underline{H}_1} \quad , \quad \boxed{\underline{H}'_2 = \underline{H}_2} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{H}' = \underline{H}}$$

Ensuite :

$$\underline{u}_{DM} = \frac{1/(jC\omega) + 1/(jC\omega) + 1/(jC\omega)}{R + R + R + 1/(jC\omega) + 1/(jC\omega) + 1/(jC\omega)} \underline{e} = \frac{3/(jC\omega)}{3R + 3/(jC\omega)} \underline{e} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{e}$$

Ainsi :

$$\boxed{\underline{H}'_3 = \frac{1}{1 + jRC\omega}} \quad \text{réponse } \boxed{\text{a}}$$