

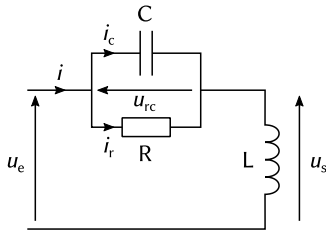
Corrigé
Physique Appliquée
Concours I.E.S.S.A. – Session 2024

Corrigé proposé par Emmanuel Guillaud, PSI*, Lycée Dumont d'Urville, Toulon. N'hésitez pas à me signaler les coquilles éventuelles par les canaux habituels. Merci d'avance.

Note préliminaire. Il y a dans l'énoncé plusieurs grosses imprécisions dans la formulation des questions qui empêchent de répondre. Il y a aussi, semble-t-il, des erreurs, mais c'est délicat à dire puisque l'absence de réponse juste parmi celles proposées est une réponse possible... Le corrigé qui suit donne les réponses qui me semblent être celles attendues... J'ai ajouté des remarques à chaque fois pour expliquer ma démarche.

Première partie.

On précise sur la Fig. C1 quelques notations qui serviront dans la résolution de cette partie.



▲ FIGURE C1. Schéma électrique.

1. D'après la loi des mailles, $u_s = u_e - u_{rc}$. Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_{rc}(0^+) = 0$, donc :

$$u_s(0^+) = u_e(0^+) - u_{rc}(0^+) = E. \quad \blacksquare \quad (1)$$

⇒ Réponse B.

2. D'après ce que l'on vient de dire,

$$i_r(0^+) = \frac{u_{rc}}{R} = 0. \quad \blacksquare \quad (2)$$

En outre, par continuité du courant à travers la bobine, $i(0^+) = 0$ donc d'après la loi des nœuds, $i_c(0^+) = 0$. Or, pour $t > 0$,

$$i_c(t) = C \cdot \frac{du_{rc}}{dt}(t) = C \cdot \frac{d(u_e - u_s)}{dt}(t) = -C \cdot \frac{du_s}{dt}(t) \quad \blacksquare \quad (3)$$

puisque $u_e(t) = E = \text{cste}$ pour $t > 0$. On en déduit que :

$$\frac{du_s}{dt}(0^+) = -\frac{i_c(0^+)}{C} = 0. \quad \blacksquare \quad (4)$$

⇒ Réponse A.

3. Aux temps longs, la bobine se comporte comme un fil donc $u_s(t) \rightarrow 0$.

⇒ Réponse A.

4. Soit Z_{rc} l'impédance complexe équivalente au dipôle RC. On note j le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

$$Z_{rc} = \frac{\frac{R}{j \cdot C \cdot \omega}}{R + \frac{1}{j \cdot C \cdot \omega}} = \frac{R}{1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega}. \quad \blacksquare \quad (5)$$

Le courant de sortie étant nul, on peut appliquer la relation du pont diviseur de tension.

$$\underline{u}_s = \underline{u}_e \cdot \frac{j \cdot L \cdot \omega}{j \cdot L \cdot \omega + \frac{R}{1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega}}, \quad \blacksquare \quad (6)$$

d'où :

$$j \cdot L \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega) \cdot \underline{u}_s + R \cdot \underline{u}_s = j \cdot L \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega) \cdot \underline{u}_e. \quad \blacksquare \quad (7)$$

On revient en notation réelle :

$$L \cdot \frac{du_s}{dt} + L \cdot R \cdot C \cdot \frac{d^2 u_s}{dt^2} + R \cdot u_s = L \cdot \frac{du_e}{dt} + L \cdot R \cdot C \cdot \frac{d^2 u_e}{dt^2}, \quad \blacksquare \quad (8)$$

soit sous forme canonique :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot u_s = \frac{d^2 u_e}{dt^2} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot \frac{du_e}{dt}. \quad \blacksquare \quad (9)$$

Par identification, on déduit que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}. \quad \blacksquare \quad (10)$$

⇒ **Réponse B.**

5. De même,

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{R \cdot C}, \quad \blacksquare \quad (11)$$

soit :

$$Q = R \cdot C \cdot \omega_0 = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad \blacksquare \quad (12)$$

⇒ **Réponse C.**

6. ⇒ **Réponse A.**

7. ⇒ **Réponse D.**

8. ⇒ **Réponse A.**

9. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} \cdot r + \omega_0^2 = 0, \quad \blacksquare \quad (13)$$

soit un discriminant :

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4 \cdot \omega_0^2 = \omega_0^2 \cdot \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right), \quad \blacksquare \quad (14)$$

avec :

$$Q = R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} = 1000 \cdot \sqrt{\frac{10 \cdot 10^{-9}}{10 \cdot 10^{-3}}} = 1, \quad \blacksquare \quad (15)$$

donc $\Delta = -3 \cdot \omega_0^2 < 0$; on est en régime pseudo-périodique.

⇒ **Réponse B.**

Deuxième partie.

10. ⇒ **Réponse A.**

11. ⇒ **Réponse B.**

12. ⇒ **Réponse C.**

13. En régime stationnaire, le flux thermique est conservatif donc $4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot j_Q(r) = \text{cste}$, soit :

$$r^2 \cdot j_Q(r) = (r + dr)^2 \cdot j_Q(r + dr). \quad \blacksquare \quad (16)$$

⇒ **Réponse D.**

Remarque. La réponse C correspond à une géométrie cartésienne, pas sphérique.

14. En géométrie sphérique, l'équation de la chaleur en régime stationnaire et sans terme source s'écrit :

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad \blacksquare \quad (17)$$

⇒ **Réponse B.**

15. On intègre l'équation précédente :

$$r^2 \cdot \frac{dT}{dr}(r) = A, \quad \blacksquare \quad (18)$$

$$\frac{dT}{dr}(r) = \frac{A}{r^2}, \quad \blacksquare \quad (19)$$

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B, \quad \blacksquare \quad (20)$$

avec :

$$T(R_1) = T_1 = -\frac{A}{R_1} + B \quad \text{et} \quad T(R_2) = T_2 = -\frac{A}{R_2} + B. \quad \blacksquare \quad (21)$$

Par différence,

$$T_1 - T_2 = -A \cdot \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right), \quad \blacksquare \quad (22)$$

donc :

$$A = \frac{T_2 - T_1}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \quad \text{et} \quad B = T_1 + \frac{A}{R_1}, \quad \blacksquare \quad (23)$$

soit :

$$T(r) = T_1 + A \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{r} \right) = T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right). \quad (24)$$

⇒ **Réponse B.**

16. D'après la loi de Fourier,

$$j_Q(r) = -K \cdot \frac{dT}{dr}(r) = -\frac{K \cdot A}{r^2}, \quad (25)$$

d'où :

$$P_{th} = j_Q(r) \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = -4 \cdot \pi \cdot K \cdot A = 4 \cdot \pi \cdot K \cdot \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}. \quad (26)$$

⇒ **Réponse A.**

17. D'après la loi d'Ohm thermique,

$$P_{th} = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}}, \quad (27)$$

d'où, en identifiant avec l'expression de la question précédente :

$$R_{th} = \frac{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}{4 \cdot \pi \cdot K}. \quad (28)$$

⇒ **Réponse B.**

Troisième partie.

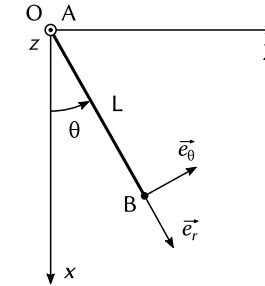
18. Le moment cinétique du pendule est donné par :

$$\vec{L}_{/O} = \vec{OB} \wedge m \cdot \vec{v}_B, \quad (29)$$

avec, pour un mouvement circulaire, $\vec{v}_B = L \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta$ et $\vec{OB} = L \cdot \vec{e}_r$, donc :

$$\vec{L}_{/O} = m \cdot L^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_z. \quad (30)$$

⇒ **Réponse C.**



▲ **FIGURE C2.** Schéma de principe.

19. Dans les coordonnées polaires de centre A, $\vec{P} = m \cdot g \cdot (\cos(\theta) \cdot \vec{e}_r + \sin(\theta) \cdot \vec{e}_\theta)$, donc :

$$M_{/O_z} = (\vec{OB} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta). \quad (31)$$

⇒ **Réponse D.**

20. **Remarque.** L'énoncé ne précise pas quelle est la référence des énergies potentielles. On prend $E_p = 0$ quand la masse est en $x = 0$.

L'axe vertical étant descendant, l'énergie potentielle de pesanteur s'écrit :

$$E_p = -m \cdot g \cdot x = -m \cdot g \cdot L \cdot \cos(\theta). \quad (32)$$

⇒ **Réponse B.**

21. On applique le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (O_z) à la masse :

$$\frac{dL_{/O_z}}{dt} = M_{/O_z}, \quad (33)$$

soit :

$$m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} = -m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta), \quad (34)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) = 0. \quad (35)$$

⇒ **Réponse A.**

22. Pour utiliser `odeint`, il faut se ramener à un système de deux équations d'ordre 1. L'équation à résoudre est :

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \cdot \sin(\theta). \quad (36)$$

On pose $x_0 = \theta$ et $x_1 = \dot{\theta}$. Alors :

$$\begin{cases} x'_0 = x_1 \\ x'_1 = -\frac{g}{L} \cdot \sin(x_0). \end{cases} \quad \blacksquare \quad (37)$$

⇒ **Réponse B.**

23. Dans la limite des petites oscillations,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \theta = 0. \quad \blacksquare \quad (38)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, d'où :

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega_0} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}. \quad \blacksquare \quad (39)$$

⇒ **Réponse D.**

Remarque. Petite erreur d'énoncé, sans grande incidence : il faut lire dans le préambule : « Pour les questions 24 et 25, ... ».

24. Le moment de la force de frottements s'écrit :

$$M_{\text{frot}/O_z} = (L \cdot \vec{e}_r \wedge (-h \cdot \vec{v})) \cdot \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \vec{v} = L \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_\theta, \quad \blacksquare \quad (40)$$

d'où $M_{\text{frot}/O_z} = -L^2 \cdot h \cdot \dot{\theta}$. On ajoute ce terme dans le théorème du moment cinétique :

$$m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} = -L^2 \cdot h \cdot \dot{\theta} - m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta), \quad \blacksquare \quad (41)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{h}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) = 0.} \quad \blacksquare \quad (42)$$

⇒ **Réponse C.**

25. Dans la limite des petites oscillations, l'équation caractéristique s'écrit :

$$r^2 + \frac{h}{m} \cdot r + \frac{g}{L} = 0, \quad \blacksquare \quad (43)$$

soit :

$$\Delta = \frac{h^2}{m^2} - \frac{4 \cdot g}{L} = \frac{1}{0,01} - \frac{40}{1} = 60. \quad \blacksquare \quad (44)$$

On est en régime apériodique, donc seules les réponses A et D sont possibles. Par ailleurs, $\dot{\theta}(0) = 0$ donc la courbe présente une tangente horizontale à l'origine.

Remarque. Pour les trois questions qui suivent, l'énoncé part un sucette...

26. **Remarque.** Que modélise la force $\vec{F}_f$? S'il s'agit des frottements de l'air, l'expression donnée est correcte, mais lorsque A est mobile, on change l'expression de la vitesse absolue, et par conséquent celle du moment associé aux frottements, qui ne donne plus un terme en $h \cdot \dot{\theta}/m$ dans l'équation du mouvement. Dans ce cas, on peut directement éliminer l'ensemble des réponses à cette question, mais aussi celles des deux suivantes!... On va donc plutôt supposer que $\vec{F}_f$ modélise des frottements visqueux dans la liaison pivot. Dans ce cas, il faut écrire $\vec{F}_f = -h \cdot \vec{v}'$, avec $\vec{v}'$ la vitesse de la masse m dans le référentiel $(\mathcal{R}')$ lié à A, en translation rectiligne par rapport à $(\mathcal{R})$.

Remarque (bis). La dynamique en référentiel non galiléen n'est pas au programme en PSI, donc suivant leur filière, les candidats n'ont pas abordé avec les mêmes outils et la même aisance cette question, ce qui introduit un biais problématique si un classement unique inter-filière est utilisé pour le concours.

Le référentiel mobile étant en translation par rapport au référentiel absolu, il faut ajouter la « force » d'inertie d'entraînement au bilan des actions mécaniques :

$$\vec{F}_{ie} = -m \cdot \vec{a}_e = m \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y. \quad \blacksquare \quad (45)$$

Le moment associé par rapport à (A_z) s'écrit :

$$\begin{aligned} M_{e/A_z} &= \left((L \cdot \cos(\theta) \cdot \vec{e}_x + L \cdot \sin(\theta) \cdot \vec{e}_y) \wedge m \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{e}_y \right) \\ &= m \cdot L \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\theta). \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (46)$$

On applique le théorème du moment cinétique par rapport à (A_z) à la masse. Compte-tenu des hypothèses faites, aucun terme ne change par rapport aux questions précédentes, mais il faut ajouter le moment d'entraînement :

$$m \cdot L^2 \cdot \ddot{\theta} = -L^2 \cdot h \cdot \dot{\theta} - m \cdot g \cdot L \cdot \sin(\theta) + m \cdot L \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\theta), \quad \blacksquare \quad (47)$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{h}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \sin(\theta) = \frac{a \cdot \omega^2}{L} \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos(\theta).} \quad \blacksquare \quad (48)$$

⇒ **Réponse E.**

Remarque (ter). Pas de réponse juste... Compte-tenu des nombreuses erreurs d'énoncé sur cette sous-partie, c'est troublant!... On peut se demander dans quelle mesure il n'y a pas une erreur de signe dans la réponse A... Le problème est que, dans ce cas, ça change la réponse à la question 26... En outre, comme mentionné plus tôt, pour un étudiant n'ayant jamais étudié les référentiels galiléens, ce problème de signe est particulièrement piégeux...

27. **Remarque.** On est en régime sinusoïdal forcé, donc est-ce que ça a vraiment un sens de parler de petites oscillations autour de la position d'équilibre (qui n'existe pas)?... Blague à part, si la formulation de la question est baroque, on comprend néanmoins qu'il faut linéariser l'équation du mouvement, ce qui permet de répondre.

L'équation linéarisée pour les mouvements de faible amplitude s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m} \cdot \dot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot \theta = \frac{a \cdot \omega^2}{L} \cdot \cos(\omega \cdot t). \quad \blacksquare \quad (49)$$

On passe en notation complexe :

$$A \cdot \exp(j \cdot \phi) \cdot \left(-\omega^2 + j \cdot \omega \cdot \frac{h}{m} + \frac{g}{L} \right) = \frac{a \cdot \omega^2}{L}. \quad \blacksquare \quad (50)$$

On évalue le module de part et d'autre du signe égal :

$$A \cdot \sqrt{\left(\frac{g}{L} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{h \cdot \omega}{m} \right)^2} = \frac{a \cdot \omega^2}{L}. \quad \blacksquare \quad (51)$$

⇒ **Réponse D.**

28. On prend cette fois-ci l'argument de part et d'autre du signe égal :

$$\phi + \arg\left(\frac{g}{L} - \omega^2 + j \cdot \frac{h \cdot \omega}{m} \right) = 0. \quad \blacksquare \quad (52)$$

Remarque. La suite dépend de la relation d'ordre entre ω et $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, mais on n'a pas d'information sur la question... Suivant le choix fait par le candidat, on trouve l'une ou l'autre des propositions faites dans l'énoncé... Comment gère-t-on le « ou » sur la grille de réponses?...

Si $\omega > \omega_0$, la partie réelle dans l'argument est positive donc :

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\frac{h \cdot \omega}{m}}{\frac{g}{L} - \omega^2} \right). \quad \blacksquare \quad (53)$$

⇒ **Réponse C.**

Si $\omega < \omega_0$, la partie réelle dans l'argument est négative donc :

$$\phi = \pi - \arctan\left(\frac{\frac{h \cdot \omega}{m}}{\frac{g}{L} - \omega^2} \right). \quad \blacksquare \quad (54)$$

⇒ **Réponse A.**

Quatrième partie.

29. Le milieu étant localement neutre, la loi de Poisson s'écrit $\Delta V = 0$, soit :

$$r \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dV}{dr} \right) = 0, \quad \blacksquare \quad (55)$$

soit :

$$r \cdot \frac{dV}{dr}(r) = A \quad \text{et} \quad V(r) = A \cdot \ln(r) + B. \quad \blacksquare \quad (56)$$

Compte-tenu des conditions aux bords,

$$\begin{cases} V_1 = A \cdot \ln(R_1) + B \\ V_2 = A \cdot \ln(R_2) + B. \end{cases} \quad \blacksquare \quad (57)$$

Par différence :

$$V_2 - V_1 = A \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1} \right), \quad \blacksquare \quad (58)$$

d'où :

$$A = \frac{V_2 - V_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \quad \text{et} \quad B = V_1 - A \cdot \ln(R_1). \quad \blacksquare \quad (59)$$

On obtient finalement :

$$V(r) = V_1 + A \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1} \right) = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \cdot \ln\left(\frac{r}{R_1} \right). \quad \blacksquare \quad (60)$$

⇒ **Réponse C.**

30. Par définition de V ,

$$\vec{E}(r) = -\vec{\text{grad}}(V)(r) = -\frac{dV}{dr}(r) = -\frac{A}{r} \cdot \vec{e}_r, \quad \blacksquare \quad (61)$$

d'où :

$$\vec{E}(r) = \frac{V_1 - V_2}{r \cdot \ln\left(\frac{R_2}{R_1} \right)} \cdot \vec{e}_r. \quad \blacksquare \quad (62)$$

⇒ **Réponse B.**

31. Les surfaces équipotentielles sont données par $V(r) = \text{cste}$ *i.e.* $r = \text{cste}$ donc ce sont des cylindres.

⇒ **Réponse B.**

32. ⇒ **Réponse D.**

33. D'après la loi d'Ohm locale, $\vec{j}(r) = \gamma \cdot \vec{E}(r)$, donc :

$$I = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \cdot \gamma \cdot E(r) = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma \cdot \frac{V_1 - V_2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad \blacksquare \quad (63)$$

⇒ **Réponse A.**

34. D'après la loi d'Ohm,

$$R_e = \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}{2 \cdot \pi \cdot h \cdot \gamma}. \quad \blacksquare \quad (64)$$

35. Dans la réponse A, il faudrait écrire « puissance thermique ». Dans la réponse B, il s'agit de la *différence* de températures, et dans la réponse D, il s'agit de la conductivité thermique et non de la diffusivité.

⇒ **Réponse C.**

Cinquième partie.

36. ⇒ **Réponse D.**

37. La bonne valeur est $0,02 \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} = 20 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

⇒ **Réponse E.**

38. ⇒ **Réponse C.**

39. ⇒ **Réponse B.**

40. **Remarque.** La vitesse de quoi?... On peut exprimer la vitesse quadratique moyenne de n'importe quoi, et donc obtenir à peu près n'importe quelle valeur!... On suppose qu'il s'agit ici d'une molécule « d'air ».

D'après la loi d'équipartition de l'énergie,

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T, \quad \blacksquare \quad (65)$$

soit :

$$v = \sqrt{\frac{3 \cdot k_B \cdot T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \cdot 300}{0,03}} = 100 \cdot \sqrt{30} \approx 500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad \blacksquare \quad (66)$$

⇒ **Réponse B.**