

Vous pouvez envoyer vos remarques à Fabien PAUCHET (fabien.pauchet@ac-lille.fr) et Gaudeline WAGNER (gaudeline.wagner@ac-lille.fr)

Remarque : sans calculatrice... mais aucune information sur la précision attendue (et aucune aide au calcul fournie en annexe). Nous avons fait le choix d'utiliser la calculatrice.

Partie I : Quelques aspects liés à la chirurgie réfractive

I.1 – Etude préliminaire : étude optique de l'œil

Q1. Analogies œil – appareil photographique

œil	appareil photographique
pupille	diaphragme
cornet + cristallin	lentille convergente
rétine	capteur (CCD pour numérique, pellicule pour argentique)

Q2. L'œil au repos n'accomode pas, il voit net des objets qui sont à l'infini et dont l'image se forme dans le plan focal image de la lentille mince qui doit être confondu avec l'écran. Ainsi :

$$f' = 17 \text{ mm} \Rightarrow V = \frac{1}{f'} = \frac{1}{17 \cdot 10^{-3}} = 59 \delta$$

Q3. Lorsque l'objet à observer se rapproche de l'œil, la distance cristallin-rétine restant inchangée, le cristallin doit devenir plus convergent, par conséquent **sa courbure augmente**.

Le point le plus proche que l'œil peut voir en accommodant se nomme le **punctum proximum (PP)**.

La relation de conjugaison donne la nouvelle valeur de la vergence :

$$V = \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} \quad \text{AN: } V = \frac{1}{17 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{-0,25} = 59 + 4 = 63 \delta$$

Q4. Pour que l'image d'un objet à l'infini se forme sur la rétine de l'œil myope sans qu'il accomode, la lentille ajoutée (L_1) doit former l'image au punctum remotum :

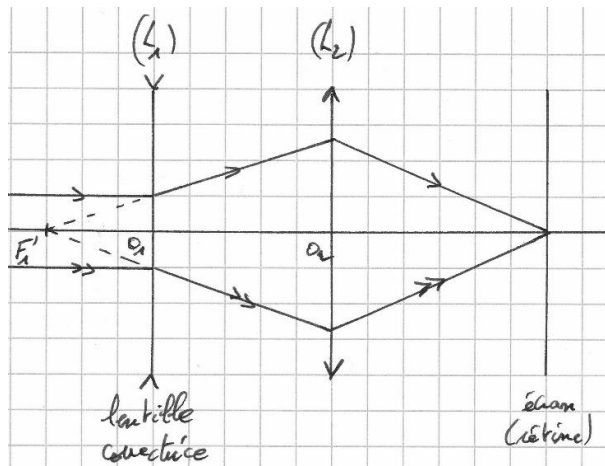
$$\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \equiv PR \xrightarrow{L_2} \text{écran}$$

La relation de conjugaison appliquée à la lentille correctrice donne (en supposant les lentilles accolées ie : O_1 et O_2 confondus, ce que l'énoncé ne précise pas) :

$$V_1 = \frac{1}{O_1 A'_1} - \frac{1}{O_1 A_1} \quad \text{AN: } V_1 = \frac{1}{-2} - 0 = -0,5 \delta$$

Remarque :

$V_1 < 0$, donc la lentille ajoutée est divergente.



Q5. On se replace dans le cas de l'œil emmétrope (l'énoncé ne le dit pas).

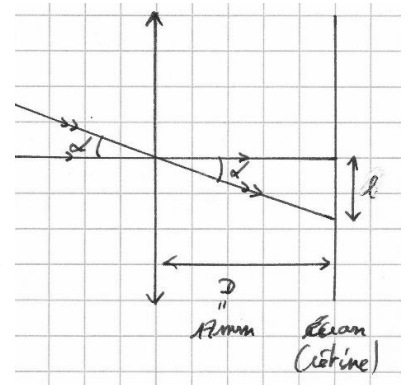
Deux points à l'infini sont distincts si leurs images sur la rétine se forment sur des cônes différents.

Dans le cas limite de la figure ci-dessous, on a : $\alpha_{lim} \approx \tan \alpha_{lim} = \frac{\ell}{D}$

Avec ℓ étant la distance entre 2 cônes que l'on peut estimer en s'appuyant sur la densité de cônes (σ) sur la rétine de surface S :

$$(\sigma \times S) \times \ell^2 = S \Leftrightarrow \sigma \times \ell^2 = 1 \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$$

AN: $\ell = \frac{1}{\sqrt{2.10^{11}}} = 2,2.10^{-6} \text{ m}$ Donc : $\alpha_{lim} = \frac{2,2.10^{-6}}{17.10^{-3}} = 1,3.10^{-4} \text{ rad}$



Q6. D'après le cours l'ouverture angulaire du faisceau traversant une pupille de diamètre a est :

$$2\varepsilon \approx 2\frac{\lambda}{a}$$

D'après l'énoncé, le diamètre de l'œil étant de 25 mm, on détermine à l'aide de la figure 1 que le diamètre de la pupille est : $a = 2,5 \text{ mm}$. En prenant pour longueur d'onde celle centrale dans le spectre visible ($\lambda = 600 \text{ nm}$), on obtient :

$$2\varepsilon \approx 2\frac{6.10^{-7}}{2,5.10^{-3}} = 4,8.10^{-4} \text{ rad} > \alpha_{lim}$$

Il semble donc que ce ne soit pas la diffraction qui termine le pouvoir séparateur de l'œil.

I.2 – Chirurgie LASIK

Q7. k est la composante du vecteur d'onde selon $\vec{u}_x$ et pas le nombre d'onde comme l'énoncé l'écrit.

Champ électrique, se propageant selon $(+\vec{u}_x)$ et polarisé selon $\vec{u}_y$: $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_y$

On va assimiler le milieu au vide. Ainsi la relation de dispersion est : $k = \frac{\omega}{c}$

Pour une onde plane progressive, le champ magnétique est déterminé à l'aide de la relation de structure :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u}_x \wedge \vec{E}}{c} \Leftrightarrow \vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_z$$

Puis le vecteur de Poynting : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_x \Leftrightarrow \vec{\Pi} = \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \vec{u}_x$

Q8. L'énergie d'une impulsion s'écrit :

$$E_{imp} = \mathcal{P}_{imp} \tau = \left(\iint_{section} \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} \right) \tau = \frac{\varepsilon_0 c E_0^2}{2} \times \pi \frac{d^2}{4} \tau \Leftrightarrow E_0^2 = \frac{8E_{imp}}{\pi \varepsilon_0 c d^2 \tau}$$

Q9. Le champ électrique créé par le noyau d'un atome d'hydrogène au niveau de son électron s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{e}{4\pi \varepsilon_0 r_H^2} \vec{u}_r$$

Q10. Les deux applications numériques sont très lourdes sans calculatrice...

Q8 donne : $E_0 = \sqrt{\frac{8 \times 4.10^{-6}}{\pi \times 9.10^{-12} \times 3.10^8 \times (1.10^{-6})^2 \times 2.10^{-15}}} = 1,4.10^{12} \text{ V.m}^{-1}$

Q9 donne : $E = \frac{1,6.10^{-19}}{4\pi \times 9.10^{-12} \times (0,5.10^{-10})^2} = 5,7.10^{11} \text{ V.m}^{-1}$

L'énoncé attend que l'on conclue par : $E_0 > E$ donc le champ électrique associé à l'impulsion laser femtoseconde permet d'effectuer l'ionisation des atomes...

Q11. k aurait dû être pris complexe ($\hat{k}$)

Application du principe fondamental de la dynamique à un électron en ne tenant compte que de la composante électrique de la force de Lorentz.

$$m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} = -e\vec{E} \Leftrightarrow i\omega m_e \vec{v}_e = -e\vec{E} \Leftrightarrow \boxed{\vec{v}_e = \frac{-e\vec{E}}{i\omega m_e}}$$

En ne considérant que les ions sont immobiles, le vecteur densité de courant électrique s'écrit :

$$\vec{j} = n \times (-e) \times \vec{v}_e \Leftrightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{ne^2}{i\omega m_e} \vec{E}}$$

Or la loi d'Ohm locale s'écrit : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ d'où l'expression de la conductivité complexe du plasma : $\boxed{\gamma = \frac{ne^2}{i\omega m_e}}$

Q12. Equation de Maxwell dans le plasma

Maxwell-Gauss : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$ (plasma localement neutre)

Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Maxwell-Thomson : $\text{div } \vec{B} = 0$

Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\gamma \vec{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

Q13. Nous savons que : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E}$, or :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = -\overrightarrow{\text{rot}} \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) = -\mu_0 \left(\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = -\mu_0 (\gamma i\omega \vec{E} + \epsilon_0 (-\omega^2) \vec{E})$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div } \vec{E}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \Delta \vec{E} = -k^2 \vec{E}$$

$$\text{D'où : } k^2 = -\mu_0 \gamma i\omega + \frac{\omega^2}{c^2} = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu_0 \frac{ne^2}{m_e} = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e c^2}$$

On pose la pulsation plasma : $\boxed{\omega_p = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e}}$ d'où la relation de dispersion : $\boxed{k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$

L'énoncé manque de précision, il demande de donner l'expression de la pulsation plasma ω_p sans dire de où elle provient, et sans préciser en fonction de quelles grandeurs l'exprimer !!

Q14. Si $\omega < \omega_p$ alors k^2 est un réel négatif d'où k est un imaginaire pur, dans ce cas il n'y a pas de propagation de l'onde. On aurait alors l'expression suivante pour k :

$$k = -i \sqrt{\frac{\omega_p^2 - \omega^2}{c^2}} = -\frac{i}{\delta}$$

Le signe « - » a été choisi pour éviter une divergence quand x tend vers l'infini... mais ici l'énoncé ne donne aucune précision.

Ainsi l'expression du champ électrique sera la suivante :

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t + \frac{x}{\delta})} = \vec{E}_0 e^{-\frac{x}{\delta}} e^{i\omega t}}$$
 Il s'agit d'une onde évanescente.

Q15. La surface du volet cornéen à découper vaut : $S = \pi \frac{d^2}{4}$ avec d le diamètre de ce volet dont la dimension est estimée à l'aide de la figure 1 : $d = 9 \text{ mm}$. Donc $\boxed{S = 6.10^{-5} \text{ m}^2}$.

On en déduit le nombre d'impulsions (N) nécessaires pour effectuer la découpe :

$$\boxed{N = \frac{S}{\pi R^2} = 1,2.10^6}$$

Bizarre il est nécessaire de connaître la grandeur R déterminée à la Q16...

La fréquence des impulsions du laser utilisé vaut alors :

$$\boxed{f = \frac{N}{\Delta t} = \frac{1,2.10^6}{10} = 1,2.10^5 \text{ Hz} = 0,12 \text{ MHz}}$$

Q16. Enoncé qui manque de précision dans les données : l'enthalpie standard de formation donnée est celle de l'eau gazeuse + la chaleur latente massique de vaporisation fournie est celle de l'eau à 100°C.

Système : {volume $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ de cornée, assimilée à de l'eau}

La transformation subie par le système est isobare (sous la pression atmosphérique) donc on a : $\Delta H = Q$

Or le transfert thermique reçu par le système provient de l'impulsion du laser, donc $Q = E_{imp}$

Par ailleurs, l'enthalpie étant une fonction d'état, décomposons la transformation subie par le système en 2 étapes. Ainsi :

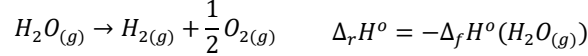
$$\boxed{\Delta H_1 + \Delta H_2 = E_{imp}}$$

Etape 1 : échauffement et vaporisation de l'eau

$$\Delta H_1 = \rho V c_{eau,liq} (T_{vap} - T_{amb}) + \rho V L_{vap} \Leftrightarrow \boxed{\Delta H_1 \approx \rho V L_{vap}}$$

Car $c_{eau,liq} (T_{vap} - T_{amb}) \approx 4,18 \times 80 = 3,3.10^2 \text{ kJ.kg}^{-1}$ assez faible devant $L_{vap} = 2,0.10^3 \text{ kJ.kg}^{-1}$, donc on simplifie le calcul en réalisant cette approximation.

Etape 2 : décomposition de l'eau en H_2 et O_2 , isobare et isotherme (on la suppose totale)



$$\text{D'où } \Delta H_2 = n_{eau} \Delta_r H^o \Leftrightarrow \boxed{\Delta H_2 = -\frac{\rho V}{M_{eau}} \Delta_f H^o}$$

Conclusion : $\rho V \left(L_{vap} - \frac{\Delta_f H^o}{M_{eau}} \right) = E_{imp} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{E_{imp}}{\rho \left(L_{vap} - \frac{\Delta_f H^o}{M_{eau}} \right)}$

$$\boxed{R = \left(\frac{3 E_{imp}}{4 \pi \rho \left(L_{vap} - \frac{\Delta_f H^o}{M_{eau}} \right)} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Application numérique : $\boxed{R = 4,0 \mu m}$

I.3 – Mesure de l'épaisseur de la cornée

Q17. L'expression du coefficient de compressibilité adiabatique (isentropique avec la notation du cours...) est :

$$\chi_s = \frac{1}{\rho_0 + \mu} \times \frac{\mu}{p} \Leftrightarrow \boxed{\chi_s = \frac{\mu}{\rho_0 p}}$$

En limitant les calculs à l'ordre 1,
 μ, p étant un infiniment petit d'ordre 2

Q18. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à une particule de fluide s'écrit :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\vec{\text{grad}} P$$

En projection sur $\vec{u}_x$ et en ne gardant que les infiniment petits d'ordre 1, on obtient :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \cdot \vec{u}_x = (\rho_0 + \mu) \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) \approx \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} \approx \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t}$$

Donc dans le cadre de l'approximation acoustique, cela donne :

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}$$

infiniment petits 2nd ordre

Q19. L'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((\rho_0 + \mu)v(x, t)) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

En ne gardant que les infiniment petits d'ordre 1, on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0}$$

Q20. On a d'après Q18 : $\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = -\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

De plus avec le théorème de Schwarz et Q19, puis Q17 : $\rho_0 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} = -\rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}$

On en conclut :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

avec la célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$$

Application numérique : la masse volumique de la cornée est prise égale à celle de l'eau, $c = 1,7 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

Q21. Les expressions de l'impédance acoustique sont :

- Cas d'une onde se propageant dans le sens des x croissants :

$$Z_a^+ = \rho_0 c = \sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$$

- Cas d'une onde se propageant dans le sens des x décroissants :

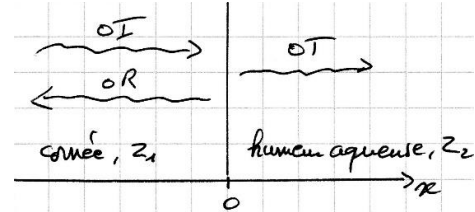
$$Z_a^- = -\rho_0 c = -\sqrt{\frac{\rho_0}{\chi_s}}$$

D'après le programme les étudiants doivent savoir retrouver ces expressions mais pas les donner directement.

Q22. Question qui nécessite une prise d'initiative importante... elle aurait

pu être repérée comme les Q15 et Q16 avec une astérisque (*).

Schéma de la situation et mise en évidence des ondes incidente (OI), réfléchie (OR) et transmise (OT).



Conditions limites au niveau de l'interface :

• L'interface étant supposée de masse nulle, il y aura continuité de la surpression, d'où :

$$\forall t, p_1(0^-, t) = p_2(0^+, t)$$

• L'interface étant supposée imperméable (les fluides ne se mélangent pas) il y aura continuité de la vitesse, d'où :

$$\forall t, v_1(0^-, t) = v_2(0^+, t)$$

Expressions de la vitesse (en posant pour simplifier que toutes les ondes ont même pulsation) :

- dans le milieu 1 ($x < 0$) : $v_1(x, t) = v_0 \cos(\omega t - k_1 x) + r v_0 \cos(\omega t + k_1 x)$

- dans le milieu 2 ($x > 0$) : $v_2(x, t) = t v_0 \cos(\omega t - k_2 x)$

Expressions de la surpression (en posant pour simplifier que toutes les ondes ont même pulsation) :

- dans le milieu 1 ($x < 0$) : $p_1(x, t) = Z_1 v_0 \cos(\omega t - k_1 x) - Z_1 r v_0 \cos(\omega t + k_1 x)$

- dans le milieu 2 ($x > 0$) : $p_2(x, t) = Z_2 t v_0 \cos(\omega t - k_2 x)$

L'écriture des conditions limites donne :

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ Z_1(1 - r) = Z_2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ t = \frac{2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{cases}$$

Écriture des vecteurs de Poynting acoustique :

- Pour l'onde incidente : $\vec{\Pi}_i(x, t) = p_i \cdot v_i \vec{u}_x = Z_1 v_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x \xrightarrow{(\cdot)}$ $\langle \vec{\Pi}_i \rangle = \frac{1}{2} Z_1 v_0^2 \vec{u}_x$

- Pour l'onde réfléchie : $\vec{\Pi}_r(x, t) = p_r \cdot v_r \vec{u}_x = -r^2 Z_1 v_0^2 \cos^2(\omega t - k_1 x) \vec{u}_x \xrightarrow{(\cdot)}$ $\langle \vec{\Pi}_r \rangle = -\frac{1}{2} r^2 Z_1 v_0^2 \vec{u}_x$

On en déduit le coefficient de réflexion en puissance de l'onde sonore à l'interface cornée / humour aqueux.

$$R = \frac{\|\vec{\Pi}_r\|}{\|\vec{\Pi}_i\|} = r^2 \Leftrightarrow R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2$$

Q23. A l'aide de ce dispositif on émet une onde sonore dans la cornée, une partie de celle-ci se réfléchit à l'interface cornée / humour aqueux et est reçue par un détecteur placé à proximité de l'émetteur. On mesure le temps séparant l'émission de l'onde et sa réception suite à la réflexion sur l'interface (Δt), connaissant la célérité de l'onde dans la cornée (c) on en déduit l'épaisseur de la cornée (e). Attention durant Δt l'onde parcourt 2 fois la distance e .

$$2e = c \cdot \Delta t \Leftrightarrow e = \frac{c \cdot \Delta t}{2}$$

Partie II - Quelques aspects relatifs au système vasculaire

II.1 - Modélisation du coeur

Q24. On a $D = \frac{\text{volume pulsation}}{\text{durée pulsation}} \simeq 88 \text{ mL/s}$ avec la durée d'une pulsation égale à $\frac{1}{70}$ min soit $\frac{6}{7}$ s.

On obtient alors : $v_s = \frac{D}{S} \simeq 29 \text{ cm/s}$

Q25. On applique le premier principe industriel : $\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q$

avec ici :

- $q = 0$ car pompe adiabatique
- $\Delta e_p = 0$ car pas de variation d'altitude
- $\Delta e_c = \frac{1}{2}(v_s^2 - v_e^2) = \frac{3}{8}v_s^2$
- $\Delta h = \Delta \left(u + \frac{P}{\rho_s} \right) = \frac{\Delta P}{\rho_s}$

d'où $w_u = \frac{3}{8}v_s^2 + \frac{P_s - P_e}{\rho_s} \simeq 9,1 \text{ J/kg}$ puis une puissance $\mathcal{P} = D_m w_u = \rho_s D w_u \simeq 0,87 \text{ W}$

II.2 - Écoulement sanguin

Q26. Un écoulement dans une conduite cylindrique est laminaire si $\text{Re} < 2.10^3$.

Q27. L'écoulement étant stationnaire, la vitesse ne dépend pas du temps, comme indiqué dans l'énoncé. Par ailleurs, en négligeant l'influence de la pesanteur, l'écoulement est invariant par rotation d'angle θ donc la vitesse ne dépend pas de cette variable.

Enfin, l'écoulement est homogène et incompressible donc $\text{div } \vec{v} = 0$ ce qui implique que $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ et donc que v ne dépend pas de x .

En conclusion, $v(r, \theta, x) = v(r)$.

Du fait de la viscosité du fluide, on a $v(r = R) = v_{\text{paroi}} = 0$.

Q28. On a $\vec{F}_v = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_x$

Q29. $\overrightarrow{F_{p,\text{amont}}} = P_1 \pi r^2 \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{F_{p,\text{aval}}} = -P_2 \pi r^2 \vec{u}_x$

Q30. On applique le principe fondamental de la dynamique au système précisé dans l'énoncé.

Exprimons l'accélération d'une particule de fluide du système :

$$\vec{a}_{pf} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = v \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$$

Ainsi, l'accélération globale du système est également nulle.

On a alors : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{F}_v + \vec{F}_p = \vec{0}$ puis, en projection selon $\vec{u}_x$, on obtient bien $\frac{dv}{dr} = -\frac{P_1 - P_2}{2\eta L} r$

On intègre l'expression précédente : $v(r) = -\frac{P_1 - P_2}{4\eta L} r^2 + A$

et on utilise la condition aux limites $v(r = R) = 0$ donc $\vec{v} = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} \vec{u}_x$

Q31. On calcule le débit volumique :

$$D_v = \iint_{section} \vec{v} \cdot d^2\vec{S} = \iint_{section} \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta L} r \, dr \, d\theta = \frac{\pi R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2) = D_v$$

La vitesse moyenne, également appelée vitesse débitante, est alors :

$$v_m = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{(P_1 - P_2) R^2}{8\eta L}$$

Q32. Il faut calculer $Re = \frac{2R v_m \rho_s}{\eta}$

On calcule d'abord $v_m = 0,78 \text{ mm/s}$ puis on trouve $Re = 2,1 \cdot 10^{-3}$ donc l'écoulement est bien **laminaire**.

Remarque : l'énoncé parle de "perte de charge" pour la perte de pression $P_1 - P_2$ alors que, souvent, la charge est homogène à une longueur. Si la charge est définie comme une pression, la perte de charge serait d'ailleurs plutôt une perte de pression totale.

Q33. On va utiliser le fait que l'écoulement est homogène et incompressible. Ainsi, le débit volumique se conserve et se "répartit" dans l'ensemble des capillaires en parallèle.

On a alors $D = N \cdot D_{v,cap} = N \cdot \pi R^2 v_{cap}$ d'où $N = \frac{D}{\pi R^2 v_{cap}} \simeq 10^9$

Partie III - Étude d'un matériau biocompatible

III.1 - Propriétés du titane

Q34. Grâce au numéro atomique $Z = 22$ et sachant qu'il y a 2 éléments sur la première ligne de la classification, et 8 sur les 2 lignes suivantes, on en déduit que le titane est le 4ème élément de la 4ème ligne : il se situe donc **en 4ème période et 4ème colonne**, ce qui le place dans le bloc des **métaux de transition**.

Q35. On voit sur le schéma de la figure 6 qu'il y a un atome sur chaque sommet ainsi qu'un atome au sein de la maille d'où la population : $N = 8 \times \frac{1}{8} + 1 = 2$

Remarques importantes : la racine carrée dans l'expression de c est trop grande et "englobe" le paramètre de maille a alors qu'elle devrait uniquement porter sur $\frac{2}{3}$ et il n'est précisé nulle part que les triangles composant la base sont équilatéraux, même si cela se voit sur la figure 7.

La masse volumique s'écrit :

$$\rho = \frac{\text{masse}}{\text{volume}} = \frac{2 \frac{M(\text{Ti})}{\mathcal{N}_A}}{\text{section} \times \text{hauteur}} = \frac{2 \frac{M(\text{Ti})}{\mathcal{N}_A}}{S \times c}$$

La section est le double de l'aire de chaque triangle équilatéral qui la composent :

$$S = \text{base} \times \text{hauteur} = a^2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} a^2}{2}$$

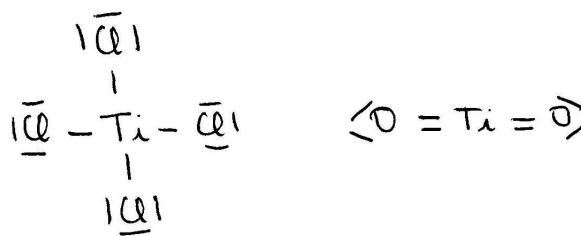
d'où $\rho = \frac{4 M(\text{Ti})}{\sqrt{3} a^2 c \mathcal{N}_A} = \frac{\sqrt{2} M(\text{Ti})}{a^3 \mathcal{N}_A}$ avec $a = 2 R$ A.N. : $\rho \simeq 4,2.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

III.2 - Production du titane

Q36. La valence du titane étant identique à celle du carbone, le titane est tétravalent. Le chlore possède 7 électrons de valence et l'oxygène 6.

Dans le tétrachlorure de titane, il faut donc placer 16 doublets et dans le dioxyde de titane 8 doublets.

Voici ci-contre des structures de Lewis vérifiant la règle de l'octet.



Q37. On applique la loi de Hess :

$$\Delta_r H^0 = \sum_i \nu_i \Delta_f H_i^0 = -38 \text{ kJ/mol} < 0$$

donc la réaction est exothermique.

$$\Delta_r S^0 = \sum_i \nu_i S_{m,i}^0 = 243 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1} > 0$$

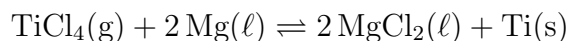
, ce qui est cohérent car la quantité de gaz augmente lors de la réaction, donc l'entropie augmente également.

Les enthalpies standard de formation de C(s) et de Cl₂(g) ne sont pas indiquées car elles sont nulles. En effet, ce sont des corps simple dans leur état standard de référence.

Q38. D'après la loi de modération de Van't Hoff, une augmentation isobare de température déplace l'équilibre dans le sens endothermique donc ici **dans le sens indirect**.

D'après la loi de modération de Le Châtelier, une augmentation isotherme de pression déplace l'équilibre dans le sens de la diminution de la quantité de gaz donc **dans le le sens indirect**.

Q39. La réaction est la suivante :

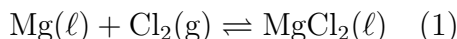


Remarque : l'énoncé ne précisait pas la formule du chlorure de magnésium.

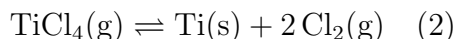
Q40. Pour répondre à cette question, il faut exprimer l'enthalpie libre de réaction :

$$\Delta_r G = \Delta_r G^0 + RT \ln \left(\frac{P^0}{P} \right)$$

Cependant, pour calculer $\Delta_r G^0$, il faut se rendre compte que la réaction étudiée est une combinaison de la réaction :



et de la réaction



On a alors $\Delta_r G^0 = 2 \Delta_r G_1^0 + \Delta_r G_2^0$.

$\Delta_r G_1^0$ est donné dans l'énoncé mais il faut calculer $\Delta_r G_2^0 = \Delta_r H_2^0 - T \Delta_r S_2^0 = 763 - 0,122 T$ (en kJ/mol).

Finalement, $\Delta_r G^0 = -453 - 0,386 T$ (en kJ/mol).

La réaction est thermodynamiquement possible si $\Delta_r G < 0$ et cette condition dépend de la température.

Calculons maintenant $\Delta_r G$ à $T = 1100$ K et $P = 0,10$ bar : $\Delta_r G = -857$ kJ/mol donc la réaction se produit **dans le sens direct**.

Remarque : que de complications pour pas grand-chose avec cette question. Quel est l'intérêt de forcer l'étudiant à faire cette combinaison d'équations et à calculer toutes ces grandeurs sans calculatrice. C'est quasiment impossible dans le temps imparti ! Par ailleurs, la valeur de $\ln(10)$ n'était pas donnée.

III.3 - Stabilité du titane

Q41.

espèce	TiO ₂ (s)	Ti ₂ O ₃ (s)	Ti ²⁺	TiO(s)	Ti(s)
n.o.(Ti)	+ IV	+ III	+ II	+II	0

en prenant n.o.(O) = -II dans les espèces comportant de l'oxygène.

Q42. Dans un diagramme E-pH, les espèces sont placées de bas en haut par nombre d'oxydation croissant.

Pour un même nombre d'oxydation, les espèces sont placées de part et d'autre d'une frontière verticale avec l'acide à gauche et la base à droite.

Ici, on a $\text{Ti}^{2+} + \text{H}_2\text{O} = \text{TiO}(\text{s}) + 2 \text{H}^+$ donc Ti^{2+} est l'acide et TiO la base. On a alors :

espèce	TiO ₂ (s)	Ti ₂ O ₃ (s)	Ti ²⁺	TiO(s)	Ti(s)
domaine	C	E	B	D	A

Q43. Pour répondre à cette question, il faut superposer au diagramme du titane celui de l'eau.

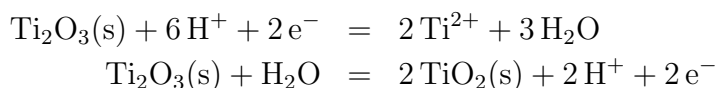
Remarque : il n'y a pas d'échelle sur le diagramme de l'énoncé donc c'est un peu difficile de superposer les droites de l'eau précisément.

Cependant, on remarque que la pente de la frontière entre D et E est de -0,06 V par unité de pH (après avoir écrit la formule de Nernst) donc on peut tracer la frontière entre H_2O et H_2 qui a la même pente et une ordonnée à l'origine nulle.

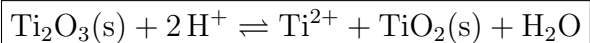
On voit alors que le titane solide n'a aucun domaine commun avec l'eau donc il est instable dans l'eau, et ce, quel que soit le pH.

On aurait également pu utiliser la frontière A/B comme repère qui est à un potentiel $E = E^0(\text{Ti}^{2+}/\text{Ti}) + 0,03 \log C_T = -1,72 \text{ V}$ et voir que la droite de l'eau n'allait jamais atteindre ce potentiel.

Q44. On remarque que l'espèce du domaine E n'est plus présente en milieu acide. Elle est l'oxydant d'un couple et le réducteur d'un autre couple. Les demi-équations sont :



La réaction de dismutation est alors :



Q45. On a déjà eu besoin de cette équation en question 42 : $\text{TiO}(\text{s}) + 2\text{H}^+ = \text{Ti}^{2+} + \text{H}_2\text{O}$

Remarque : l'énoncé aurait dû préciser si cette réaction devait être écrite en milieu acide ou base. En général, les réactions de solubilisation doivent être écrites en milieu basique pour utiliser la constante de solubilité K_s . Ici, on l'écrit en milieu acide, faute de plus d'information.

$$\text{On a alors } K^0 = \frac{[\text{Ti}^{2+}]}{[\text{H}^+]^2} = \frac{C_T}{10^{-2\text{pH}}} \Rightarrow \boxed{\text{pH} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{K^0}{C_T} \right) = 7}$$