

Le vélo hybride : toujours électrique, même sans batterie

I - Le pack de supercondensateurs

I.1 - Étude d'un supercondensateur

Q1) On suppose le plan chargé confondu avec le plan Oyz (plan $x = 0$). En un point M , tout plan perpendiculaire au plan chargé est plan de symétrie de la distribution de charge, $\vec{E}_p(M)$ est perpendiculaire au plan $x = 0$:

$$\vec{E}_p(M) = E(M)\vec{u}_x$$

Le plan chargé est infini, donc invariant par toute translation parallèlement à lui-même, donc perpendiculairement à $\vec{u}_x$:

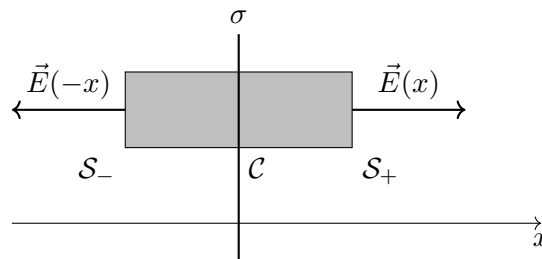
$$\vec{E}_p(M) = E(x)\vec{u}_x$$

Le plan chargé est plan de symétrie pour lui-même, donc en deux points M et M' symétriques par rapport au plan chargé, le champ est symétrique par rapport au plan chargé. Par conséquent comme $\vec{E}$ est orthogonal au plan :

$$\vec{E}_p(-x) = -\vec{E}_p(x) ; E(-x) = -E(x)$$

On applique le théorème de Gauss à un tube de champ, cylindre $\mathcal{C}$ de génératrices parallèles à $\vec{u}_x$, de section droite S , fermé par deux surfaces planes $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ situées dans les plans parallèles au plan chargé, d'abscisses $x > 0$ et $-x$ selon $\vec{u}_x$, en tenant compte de la permittivité diélectrique relative :

$$\oiint_{\mathcal{C} \cup \mathcal{S}_+ \cup \mathcal{S}_-} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$



La contribution de $\mathcal{C}$ est nulle car il s'agit d'un tube de champ : $\vec{E}_p \perp d\vec{S}_{\text{ext}}$. Les contributions de $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$ ont pour expressions

$$\iint_{\mathcal{S}_+} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{\mathcal{S}_+} E(x)\vec{u}_x \cdot dS\vec{u}_x = SE(x)$$

$$\iint_{\mathcal{S}_-} \vec{E}_p \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = \iint_{\mathcal{S}_-} E(-x)\vec{u}_x \cdot dS(-\vec{u}_x) = -SE(-x) = SE(x)$$

Ce tube de champ découpe une surface d'aire S sur le plan chargé, donc

$$Q_{\text{int}} = \sigma S$$

Finalement le théorème de Gauss s'écrit

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}_{\text{ext}} = 2SE(x > 0) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

d'où on déduit l'expression du champ électrique

$$\vec{E}_p(x > 0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x ; \vec{E}_p(x < 0) = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

On utilise le théorème de superposition pour calculer le champ total créé par les 4 plans chargés, en notant $\vec{E}_{p,\sigma,\pm}$ le champ créé par densité surfacique de charge σ du côté des x négatifs ($-$) ou des x positifs ($+$). Dans l'espace inter-électrodes, on distingue ainsi 3 zones :

— $-a < x < -a + \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',-} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma + \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $-a + \delta < x < a - \delta$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',-} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' - \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

— $a - \delta < x < a$:

$$\vec{E} = \vec{E}_{p,\sigma,+} + \vec{E}_{p,-\sigma',+} + \vec{E}_{p,\sigma',+} + \vec{E}_{p,-\sigma,-} = \frac{1}{2\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma - \sigma' + \sigma' + \sigma) \vec{u}_x = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Q2) Le potentiel vérifie $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, et sous forme intégrale $V(A) - V(B) = \int_B^A \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r}$. On peut donc écrire entre les deux électrodes, avec $\vec{E}(x) = E(x) \vec{u}_x$:

$$U = V(-a) - V(a) = \int_{-a}^a E(x) dx = \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{-a+\delta}^{a-\delta} \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx + \int_{a-\delta}^a \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} dx$$

$$U = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} (\sigma \delta + (\sigma - \sigma')(2a - 2\delta) + \sigma \delta) = \frac{2a\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} - \frac{2(a - \delta)\sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r}$$

Q3) L'électrolyte est conducteur, donc la présence d'un champ électrique dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$ non nul entraîne l'existence d'un courant électrique source d'une variation temporelle des densités surfaciques de charge sur les doubles couches : on se trouve alors en régime variable. On en déduit qu'en régime permanent le champ électrique doit être nul dans la région $-a + \delta < x < a - \delta$. D'après Q1) le champ dans cette région vaut $\frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$: en régime indépendant la nullité du champ électrique entraîne $\sigma' = \sigma$. L'expression de U devient

$$U = \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma$$

En régime permanent, la densité surfacique de charge de l'électrode $x = -a$ vaut

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2\delta} U$$

On en déduit la charge Q puis la capacité C_0 du supercondensateur

$$Q = \sigma S = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta} U = C_0 U$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

Pour un condensateur à air de même géométrie (plan, électrodes de surface S , distance entre électrodes $2a$)

$$C_{\text{air}} = \frac{\epsilon_0 S}{2a}$$

Soit un rapport ($\epsilon_r > 1$)

$$\frac{C_0}{C_{\text{air}}} = \epsilon_r \frac{a}{\delta} \gtrsim \frac{10^{-6}}{10^{-8}} = 100 \gg 1$$

$C_0 \gg C_{\text{air}}$, d'où l'appellation supercondensateur.

1.2 - Modèle électrocinétique du supercondensateur

Q4) Dans la zone $-a + \delta < x < a - \delta$, $\vec{E} = \frac{\sigma - \sigma'}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$, d'où une densité de courant

$$\vec{j}_{\text{elec}} = \gamma \vec{E} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{u}_x$$

Le courant électrique reçu par le plan $x = a - \delta$ de l'électrolyte (situé en $x < a - \delta$) a pour expression

$$I_{\text{reçu}} = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{u}_x = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Comme ce plan ne reçoit de charge que de l'électrolyte (l'énoncé précise que la double couche est isolante), le bilan de charges entre t et $t + dt$ s'écrit pour ce plan

$$q'(t + dt) - q'(t) = \frac{dq'}{dt} dt = I_{\text{reçu}} dt = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S dt$$

$$\frac{dq'}{dt} = \frac{\gamma(\sigma - \sigma')}{\epsilon_0 \epsilon_r} S$$

Q5) Pour $t > 0$ la tension U est constante, et d'après Q2)

$$U = \frac{2a}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma - \frac{2(a - \delta)}{\epsilon_0 \epsilon_r} \sigma'$$

ce qui permet d'exprimer σ à tout instant :

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma'$$

D'autre part $q' = \sigma' S$, donc en remplaçant q' et σ par leurs expressions en fonction de σ'

$$S \frac{d\sigma'}{dt} = \frac{\gamma S}{\epsilon_0 \epsilon_r} \left(\frac{\epsilon_0 \epsilon_r}{2a} U + \frac{a - \delta}{a} \sigma' - \sigma' \right) = \frac{\gamma S U}{2a} - \frac{\gamma S \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma'$$

après simplification par S on obtient l'équation différentielle proposée par l'énoncé

$$\frac{d\sigma'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} \sigma' = \frac{\gamma U}{2a}$$

On identifie sur cette équation différentielle du premier ordre en σ' le temps caractéristique

$$\tau = \frac{a \epsilon_0 \epsilon_r}{\delta \gamma}$$

Si on modélise le supercondensateur par l'association série d'un condensateur et d'une résistance, l'équation d'évolution de la charge q du supercondensateur soumis à la tension U s'écrit

$$u_C + u_R = \frac{q}{C_0} + R_0 \frac{dq}{dt} = U$$

Or en notant $q' = S\sigma'$ la charge associée à σ' , l'équation de la question précédente s'écrit

$$\frac{dq'}{dt} + \frac{\gamma \delta}{\epsilon_0 \epsilon_r a} q' = \frac{\gamma S U}{2a}$$

ou

$$U = \frac{2a}{\gamma S} \frac{dq'}{dt} + \frac{2\delta}{\epsilon_0 \epsilon_r S} q' = R_0 \frac{dq'}{dt} + \frac{q'}{C_0}$$

soit par identification

$$R_0 = \frac{2a}{\gamma S} ; C_0 = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{2\delta}$$

On retrouve la valeur de C_0 , et on peut interpréter R_0 comme la résistance associée à l'électrolyte de conductivité γ et d'épaisseur approchée $2a$.

1.3 - Dimensionnement du pack de supercondensateurs du vélo hybride

Q6) La tension $u_C = q/C_0$ aux bornes d'une capacité est continue, donc entre les instants $t = 0^-$ et $t = 0^+$

$$R_0(i_0^+ - i_0^-) + \frac{q(0^+) - q(0^-)}{C_0} = R_0(i_0^+ - i_0^-) = U(0^+) - U(0^-)$$

soit

$$R_0 = \frac{U(0^+) - U(0^-)}{i_0^+ - i_0^-} = \frac{2,95 - 3,00}{33} = 1,5 \times 10^{-3} \Omega$$

Pour $0 < t < T$, i est constant, d'où

$$\frac{q(T^-) - q(0^+)}{C_0} + R_0(i(T^-) - i(0^+)) = \frac{i(T - 0)}{C_0} = U(T^-) - U(0^+)$$

soit

$$C_0 = \frac{iT}{U(T^-) - U(0^+)} = \frac{-33 \times 14,5}{1,5 - 2,95} = 3,3 \times 10^2 \text{ F}$$

(Sur la figure 6, on lit effectivement la valeur 330 F)

Q7) On calcule le travail que doit fournir le pack, en négligeant pertes électriques et mécaniques du vélo. La variation d'énergie potentielle de pesanteur pour l'ensemble cycliste/vélo, de masse total 100 kg d'après l'énoncé vaut

$$\Delta \mathcal{E}_p = mg\Delta h = 100 \times 9,81 \times 60 = 59 \text{ kJ}$$

Pour un niveau d'assistance faible (50%) le pack doit fournir 1/3 de cette énergie soit 20 kJ

La pack initialement chargé à tension nominale V_N peut se décharger jusqu'à $V_N/2$, soit une énergie fournie

$$\mathcal{E}_c = -\Delta \left(\frac{CU^2}{2} \right) = \frac{C}{2} (V_N^2 - (V_N/2)^2) = \frac{3}{8} CV_N^2 = \frac{3 \times 330 \times 3^2}{8} = 1,1 \text{ kJ}$$

Par conséquent le travail nécessaire au franchissement du dénivelé nécessite $N = 20/1,1 = 18$ condensateurs.

Le moteur nécessite une tension de 36 V pour son fonctionnement, tandis que chaque condensateur a une tension nominale de 3 V et minimale de 1,5 V, donc le fonctionnement du moteur nécessite au minimum $36/3 = 12$ condensateurs chargés à V_N en série.

On peut utiliser 18 condensateurs en série et un dispositif permettant d'abaisser la tension lorsque les condensateurs sont à leur tension nominale V_N et de la relever lorsqu'il sont déchargés à $V_N/2$ (c'est l'objet de la sous-partie suivante, dont les données confirment l'association de 18 condensateurs de tension nominale $V_N = 3 \text{ V}$ en série : $V_{\max} = 54 \text{ V} = 18 \times 3 \text{ V}$ et $V_{\min} = V_{\max}/2$).

1.4 - Interface entre les supercondensateurs et l'ensemble onduleur-moteur synchrone

Q8) En dehors de la résistance R_C modélisant la charge, les composants sont supposés idéaux, donc le transfert de puissance entre la source et la charge est idéal. La conservation de la puissance entre la source et la charge s'écrit $\mathcal{P} = \langle V_e I_e \rangle = \langle V_s I_s \rangle$, ou comme V_e et I_s sont constants $V_e \langle I_e \rangle = \langle V_s \rangle I_s$, La valeur moyenne maximale de I_e est obtenue pour la valeur minimale $V_e = 27 \text{ V}$:

$$I_{e,\max} = \frac{V_s I_s}{V_{e,\min}} = \frac{36 \times 10}{27} = 13 \text{ A}$$

Q9) En régime périodique établi, $i(t) = i(t + T)$, et pour chacune des inductances

$$\langle V_L \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T L \frac{di}{dt} dt = \frac{L}{T} [i]_0^T = 0$$

On applique la loi des mailles sur la maille formée du générateur, des inductances L_1 et L_2 et de la capacité C_1 : $V_e = V_{L_1} + V_{C_1} + V_{L_2}$.

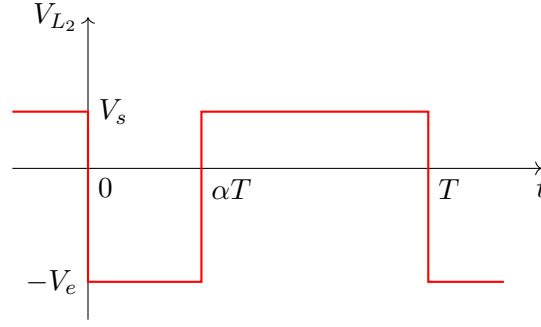
En valeur moyenne, compte tenu du résultat précédent $\langle V_e \rangle = \langle V_{L_1} \rangle + \langle V_{C_1} \rangle + \langle V_{L_2} \rangle = \langle V_{C_1} \rangle$

$$\langle V_{C_1} \rangle = V_e$$

Q10) Durant la première phase $0 < t < \alpha T$, la loi des mailles sur la maille constituée de l'interrupteur K_1 (fermé), de la capacité C_1 et de l'inductance L_2 s'écrit $V_{K_1} + V_{C_1} + V_{L_2} = V_{C_1} + V_{L_2} = 0$:

$$V_{L_2}(0 < t < \alpha T) = -V_{C_1}(0 < t < \alpha T) \approx -\langle V_{C_1} \rangle = -V_e$$

Durant la seconde phase $\alpha T < t < T$, l'interrupteur K_2 est fermé, donc $V_{L_2} = V_s$ est constante, d'après les hypothèses de l'énoncé (C_2 doit être choisi de manière à lisser les ondulations de tension). Comme $\langle V_{L_2} \rangle = 0$, la tension V_{L_2} est constante par morceaux, et l'aire sous sa courbe représentative est nulle.



Q11) On traduit la relation $\langle V_{L2} \rangle = 0$:

$$0 = \frac{1}{T} \int_0^T V_{L2} dt = \frac{1}{T} (\alpha T (-V_e) + (1 - \alpha) T V_s) = -\alpha V_e + (1 - \alpha) V_s$$

d'où le gain

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}$$

Le convertisseur permet d'obtenir une tension V_s constante tout au long de la décharge du pack d'alimentation, alors que la tension qu'il délivre décroît. Cela nécessite une boucle de rétroaction permettant de contrôler le rapport cyclique α au cours de la décharge.

Q12) On calcule les gains extrêmes et on relève sur le graphique les rapports cycliques associés

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{36}{54} = 0,67 ; \alpha \approx 0,4 \quad ; \quad \frac{V_s}{V_e} = \frac{36}{27} = 1,32 ; \alpha \approx 0,6$$

On constate que ces points sont situés dans un domaine où l'influence du rapport R_L/R_c est négligeable.

Si on laisse le pack se décharger complètement, le rapport V_s/V_e augmente, et il n'est possible de maintenir une tension de sortie constante en dessous d'une certaine tension du pack (la valeur maximale de V_s/V_e tenant compte de la valeur R_L/R_c vaut environ 4,5).

Remarques : La courbe tracée ne correspond pas à $R_L/R_C = 0,1$ mais à $R_L/R_C = 0,01$.

il semble d'autre part qu'il manque un facteur α^2 dans l'expression du gain en tension. En effet, en présence de pertes modélisée par une résistance R_L en série avec l'inductance L_1 , la loi des mailles de la question Q10) est modifiée en $V_e = V_{L1} + R_L I_e + V_{C1} + V_{L2}$, soit en valeur moyenne $V_e = R_L \langle I_e \rangle + \langle V_{C1} \rangle$ et dans l'hypothèse de faibles ondulations (V_{C1} et I_e constantes et égales à leurs valeurs moyennes) $V_{C1} = V_e - R_L I_e$.

L'allure de $V_{L2}(t)$ n'est pas modifiée, donc en utilisant comme précédemment $\langle V_{L2} \rangle = 0$, l'expression de V_s devient

$$V_s = \frac{\alpha}{1 - \alpha} (V_e - R_L I_e)$$

Le bilan énergétique s'écrit, en supposant les ondulations négligeables : $V_e I_e = R_L I_e^2 + R_C I_s^2$, tous les dipôles à l'exception des résistances étant idéaux. Par conséquent $(V_e - R_L I_e) I_e = V_s I_s$, soit, en reportant dans l'expression précédente

$$V_s = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{V_s I_s}{I_e} \quad : \quad I_e = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_s = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \frac{V_s}{R_C}$$

On peut alors éliminer I_e dans la première relation pour obtenir

$$V_s = \frac{\alpha}{1-\alpha}(V_e - R_L I_e) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \left(V_e - \frac{R_L}{R_C} \frac{\alpha}{1-\alpha} V_s \right)$$

Et finalement isoler V_s pour calculer le gain

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{\alpha}{(1-\alpha) \left(1 + \frac{R_L}{R_C} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \right)}$$

La courbe est peu différente de celle tracée dans le sujet (le gain maximal est légèrement plus élevé), et les conclusions sont inchangées.

Q13) On calcule l'ondulation de I_e en considérant la phase $0 < t < \alpha T$, durant laquelle la loi des mailles appliquée à l'association de la source, de L_1 et de K_1 (fermé durant cette phase) s'écrit $V_e = V_{L_1} + V_{K_1} = V_{L_1}$, soit

$$L_1 \frac{di_e}{dt} = V_e : i_e(0 < t < \alpha T) = i_e(0) + \frac{V_e}{L_1} t$$

On en déduit l'ondulation

$$\Delta i_e = \frac{V_e}{L_1} \alpha T = \frac{\alpha V_e}{f L_1}$$

puis la condition sur L_1 pour respecter l'exigence $\Delta i_e < 0,1 I_e$, en utilisant la conservation de la puissance $V_s I_s = V_e I_e$

$$L_1 > \frac{10 \alpha V_e}{f I_e} = \frac{10 \alpha V_e^2}{f V_s I_s}$$

Puisque dans le domaine étudié l'influence de R_L est négligeable, on peut utiliser l'expression approchée du rapport $V_s/V_e = \alpha/(1-\alpha)$, pour exprimer la condition sur L_1 en fonction de la seule variable α :

$$L_1 > \frac{10 V_s}{f I_s} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha}$$

Le sens de variation de la valeur minimale de L_1 en fonction de α est donnée par la dérivée

$$\left(\frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right)' = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2} \leq 0$$

car $0 \leq \alpha \leq 1$. La valeur minimale de L_1 décroît lorsque α croît, donc la condition la plus contraignante est obtenue pour $\alpha = 0,4$ ($V_e = 54$ V), avec $V_s = 36$ V, $I_s = 10$ A, $f = 300$ kHz :

$$L_1 > 108 \mu\text{H}$$

(on peut vérifier que pour $\alpha = 0,6$ la condition s'écrit $L_1 > 81 \mu\text{H}$ qui est bien satisfaite en choisissant $L = 108 \mu\text{H}$)

Q14) Lors de la phase $0 < t < \alpha T$, l'interrupteur K_2 est ouvert, donc pour le condensateur C_2 : $i_C = i_{K_2} - I_s = -I_s$, d'où

$$C_2 \frac{dV_{C_2}}{dt} = C_2 \frac{dV_s}{dt} = -I_s$$

donc par intégration sur la durée de cette phase (I_s est supposé constant) :

$$C_2 \frac{\Delta V_s}{\alpha T} = -I_s : \frac{|\Delta V_s|}{V_s} = \frac{\alpha T I_s}{C_2 V_s}$$

La contrainte sur C_2 s'écrit $|\Delta V_s|/V_s < 0,01$, ce qui entraîne la condition sur C_2 :

$$C_2 > \frac{100 \alpha T I_s}{V_s} = \frac{100 \alpha I_s}{f V_s}$$

Pour $V_e = V_s$, α vérifie la relation $V_s/V_e = 1 = \alpha/(1 - \alpha)$ (toujours en négligeant l'influence de R_L), soit $\alpha = 0,5$, ce qui conduit à la valeur numérique

$$C_2 > 46 \mu\text{F}$$

II - Le recyclage de la batterie lithium-ion

II.1 - La lixiviation

Q15) Immédiatement après l'instant initial, les rendements pour Li et M, initialement nuls (pas d'espèce en solution) sont différents de 0, donc la première étape est instantanée. Dans les trois expériences, le rapport des concentrations des formes solubles de Li et M, égal au rapport des rendements vaut

$$\frac{[\text{LiCl}]}{[\text{MCl}_2]} = \frac{r(\text{Li})}{r(\text{M})} = \frac{0,7}{0,35} = \frac{0,6}{0,3} = 2$$

ce qui est compatible avec l'équation-bilan de la première étape, puisque les coefficients stœchiométriques $\frac{2m-2}{2m-1}$ pour LiCl et $\frac{m-1}{2m-1}$ pour MCl_2 sont dans un rapport 2.

Le rapport des rendements évolue ensuite dans le temps, ce qui indique que la seconde étape est lente.

Q16) La première étape est supposée totale, et elle est instantanée : la seconde étape débute alors qu'elle est achevée, ce qui conduit au bilan de matière

	LiCl	MCl_2
$t = 0^-$	0	0
$t = 0^+$	$n_0(\text{LiCl})$	$n_0(\text{MCl}_2)$
$t > 0$	$n_0(\text{LiCl}) + \frac{\xi_2(t)}{m}$	$n_0(\text{MCl}_2) + \xi_2(t)$

soit en terme de concentration, en notant V le volume de solution

$$[\text{LiCl}](t) = [\text{LiCl}]_0 + \frac{\xi_2(t)}{mV} ; [\text{MCl}_2](t) = [\text{MCl}_2]_0 + \frac{\xi_2(t)}{V}$$

Puis en éliminant l'avancement volumique $\xi_2/V = m([\text{LiCl}](t) - [\text{LiCl}]_0)$:

$$[\text{MCl}_2](t) = ([\text{MCl}_2]_0 - m[\text{LiCl}]_0) + m([\text{LiCl}](t))$$

Pour les différentes conditions initiales, le tracé de $[\text{MCl}_2]$ en fonction de $[\text{LiCl}]$ doit être compatible avec une droite de pente m . Ceci est cohérent avec les graphiques correspondants de l'énoncé, avec les deux valeurs calculées $m = 2,12$ et $m = 2,14$ soit $m \approx 2,1$.

Q17) Les quantités de matière ont pour expressions

$$n_0(\text{HCl}) = [\text{HCl}]_0 l ; n_0(\text{NMC111}) = \frac{s}{M_{\text{NMC111}}}$$

soit

$$x_0 = \frac{n_0(\text{HCl})}{n_0(\text{NMC111})} = \frac{[\text{HCl}]_0 l M_{\text{NMC111}}}{s} = M_{\text{NMC111}} [\text{HCl}]_0 \frac{l}{s}$$

Avec $M_{\text{NMC111}} = 97 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, des valeurs respectives de $[\text{HCl}]_0$ égales à 4, 4, $1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ et de s/l égales à 20, 120 et $80 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1}$, on obtient :

$$x_0(A) = 19 ; x_0(A) = 3,2 ; x_0(A) = 1,2$$

Q18) La seconde étape ne peut se dérouler qu'en présence de HCl. Or cette espèce est consommée dans la première étape à raison de $4m - 4$ moles de HCl pour une mole de NMC111. Pour que la seconde étape se produise (au moins partiellement), HCl ne doit pas être réactif limitant de la première étape (totale), d'où la condition

$$x_0 > \frac{4m - 4}{2m - 1} = 1,4 = x_1$$

Cette condition n'est pas vérifiée pour l'expérience C ($x = 1,2 < x_1$).

D'après le bilan de matière de la première étape, $n(\text{LiCl}) = n_0(\text{HCl})/2$ et $n(\text{MCl}_2) = n_0(\text{HCl})/4$, ce qui conduit aux expressions des rendements

$$\frac{n(\text{LiCl})}{n_0(\text{LiMO}_2)} = \frac{n_0(\text{HCl})}{2n_0(\text{NMC111})} = \frac{x_0}{2} = 0,60 ; \frac{n(\text{MCl}_2)}{n_0(\text{LiMO}_2)} = 0,30$$

Valeurs cohérentes avec le graphique donné pour l'expérience C.

Q19) La relation donnée peut être interprétée comme l'analogue de la loi de Newton utilisée pour modéliser les phénomènes de transferts thermiques convectifs dans un domaine linéaire.

La relation peut s'écrire

$$F_A = DS \frac{C_A - C_{\text{Af}}}{R}$$

On peut alors interpréter $R(t)$ comme l'épaisseur caractéristique de la couche limite sur laquelle se produit le phénomène de diffusion particulaire, et le rapport $\frac{C_A - C_{\text{Af}}}{R}$ comme une approximation de la projection du gradient de concentration sur la normale sortante du grain. Pour une surface élémentaire d'aire dS la relation est alors analogue à la loi de Fick pour le flux de particule dirigé vers le grain

$$dF_A = -D \overrightarrow{\text{grad } c} \cdot dS \vec{n}_{\text{entrant}} = \frac{D}{R} (C_A - C_{\text{Af}}) dS$$

ce qui conduit à la relation pour un transfert uniforme à la surface du grain.

En particulier le flux de particules se produit des zones de forte concentration (le cœur de la solution) vers les zones de faible concentration (le front de réaction, où l'acide chlorhydrique est consommé).

Q20) La conservation du flux de particules à la traversée du front de réaction $F_A = F_{AC}$, traduit la non accumulation du réactif au voisinage du front de propagation en régime quasi-stationnaire : les molécules de réactifs apportées à la surface du front de réaction sont consommées par la réaction.

En pratique la conservation du flux à la traversée d'une surface est toujours nécessaire. Le modèle suppose par contre la conservation du flux à travers la couche du film externe limite ce qui traduit la non-accumulation de réactif dans cette couche en régime quasi-stationnaire (la relation donnant F_A suppose des phénomènes quasi-stationnaires)

D'après l'équation-bilan de la réaction

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\delta n_A}{dt} = \frac{1}{\nu} \frac{\delta n_B}{dt}$$

où δn_A et δn_B sont les quantités de réactifs consommées pendant dt . D'après la définition de F_{AC} et l'égalité $F_A = F_{AC}$

$$\frac{\delta n_A}{dt} = F_A$$

La variation de la quantité N_B de solide B vérifie

$$\frac{dN_B}{dt} = - \frac{\delta n_B}{dt}$$

Par conséquent

$$F_A = - \frac{1}{\nu} \frac{dN_B}{dt}$$

Q21) L'égalité $F_A = F_{AC}$ donne, à partir des expressions des flux $F_A = k_D S(C_A - C_{Af})$ et $F_{AC} = k_C C_{Af}$, la relation

$$k_D S(C_A - C_{Af}) = k_C C_{Af}$$

d'où l'expression

$$C_{Af} = \frac{k_D}{k_D + k_C} C_A$$

puis l'expression de F_A en fonction de la seule concentration C_A

$$F_A = \frac{k_D k_C S}{k_D + k_C} C_A = \frac{C_A}{R_{\text{éq}}}$$

où

$$R_{\text{éq}} = \frac{k_D + k_C}{k_D k_C S} = \frac{D/R + k_C}{(D/R) k_C 4\pi R^2} = \frac{D + k_C R}{4\pi R^2 D k_C}$$

Q22) Le masse de la boule vaut $m = \rho_B V = \rho_B \frac{4\pi R^3}{3} = N_B(R) M_B$, soit

$$N_B(R) = \frac{4\pi R^3}{3} \frac{\rho_B}{M_B}$$

Q23) D'après les questions précédentes :

$$\frac{4\pi\rho_B}{M_B}R^2\frac{dR}{dt} = \frac{dN_B}{dt} = -\nu F_A = -\nu\frac{C_A4\pi R^2Dk_C}{D+k_CR}$$

On sépare les variables R et t

$$dt = -\frac{\rho_B}{\nu C_A D k_C M_B}(D + k_C R)dR$$

Puis on intègre entre $t = 0$ ($R = R_0$) et instant t quelconque :

$$t = \frac{\rho_B}{\nu C_A D k_C M_B} \left(D(R_0 - R) + \frac{k_C}{2}(R_0^2 - R^2) \right) = \dots$$

$$\dots \frac{\rho_B}{\nu C_A D k_C M_B} \left(DR_0 \left(1 - \frac{R}{R_0} \right) + \frac{k_C R_0^2}{2} \left(1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right) \right)$$

relation qui s'écrit

$$t = \tau_{\text{film}} \left(1 - \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \right) + \tau_{\text{cin}} \left(1 - \left(\frac{R}{R_0} \right) \right)$$

où

$$\tau_{\text{film}} = \frac{\rho_B}{\nu C_A M_B} \frac{R_0^2}{2D} ; \tau_{\text{cin}} = \frac{\rho_B}{\nu C_A M_B} \frac{R_0}{k_C}$$

τ_{film} dépend du coefficient de diffusion D caractéristique du transfert de réactif dans le film, tandis que τ_{cin} dépend de la constante de réaction k_C , ce qui confirme l'attribution de l'énoncé.

Q24) Le rapport des temps caractéristiques a pour expression

$$\frac{\tau_{\text{cin}}}{\tau_{\text{film}}} = \frac{2D}{R_0 k_C}$$

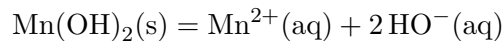
Pour les données de l'énoncé : $R_0 = 15 \mu\text{m}$, $D = 1,25 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et $k_C = 1,00 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\frac{\tau_{\text{cin}}}{\tau_{\text{film}}} = 1,7 \times 10^3 \gg 1$$

Par conséquent $\tau_{\text{cin}} \gg \tau_{\text{film}}$: le phénomène limitant est la réaction chimique.

II.2 - La précipitation sélective

Q25) La réaction de dissolution de Mn(OH)_2 dans l'eau s'écrit



Par conséquent, en négligeant l'autoprotolyse de l'eau, $[\text{HO}^{-}] = 2[\text{Mn}^{2+}]$ et à l'équilibre en présence de solide $K_s = ([\text{Mn}^{2+}] \times [\text{HO}^{-}]^2)/C^{\ominus 3} = [\text{HO}^{-}]^3/(2C^{\ominus 3})$.

$$pK_s = 3p\text{OH} + \log 2 = 3(pK_e - p\text{H}) + \log 2 = 3(14 - 9,9) + 0,3 = 12,6$$

Q26) La réaction de dissolution s'écrit $M(OH)_2 = M^{2+} + 2HO^-$ pour les deux cations métalliques divalents.

S'il y a précipitation, l'équilibre chimique est réalisé : $K_s = Q = [M^{2+}][HO^-]^2/C^{\ominus 3}$.

Une partie des cations métalliques est consommée dans la précipitation : $[M^{2+}] < C_0$, soit la condition de précipitation :

$$K_s \leq \frac{C_0[HO^-]^2}{C^{\ominus 3}}$$

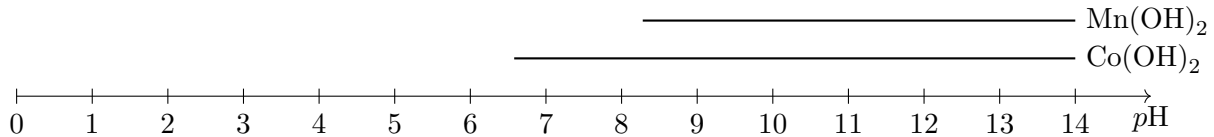
qui s'écrit en passant au logarithme $pK_s \geq -\log(C_0/C^{\ominus}) + 2(pK_e - pH)$, et en isolant le pH

$$pH \geq pK_e - \frac{\log(C_0/C^{\ominus}) + pK_s}{2} = pH_{\min}$$

Q27) Avec les données numériques de l'énoncé $C_0 = 0,069 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, $K_s(Mn(OH)_2) = 12,6$, $K_s(Ni(OH)_2) = 16$

$$pH_{\min}(Mn(OH)_2) = 8,3 ; pH_{\min}(Co(OH)_2) = 6,6$$

Soit sous forme graphique



Q28) D'après la question précédente $Co(OH)_2$ précipite avant $Mn(OH)_2$: on veut donc précipiter 99% des ions Co^{2+} sans précipiter d'ions Mn^{2+} . Il reste donc une concentration d'ions Co^{2+} inférieure à $C_0/100$. La relation obtenue à la question précédente s'écrit dans ce cas :

$$pH \geq pK_e - \frac{\log(C_0/(100C^{\ominus})) + pK_s(Co(OH)_2)}{2} = pH_{\min}(Co(OH)_2) + 1 = 7,6$$

Comme cette valeur est inférieure à $pH_{\min}(Mn(OH)_2) = 8,3$ on peut précipiter 99% des ions Co^{2+} sans précipitation des ions Mn^{2+} en imposant $7,6 < pH < 8,3$.

On peut séparer les cations Mn^{2+} et Co^{2+} en partant d'une solution acide des deux ions, puis en augmentant le pH à une valeur comprise entre 7,58 et 8,28 (pour les concentrations données dans l'énoncé). On attend l'établissement de l'équilibre et on filtre, ce qui permet de récupérer le précipité de $Co(OH)_2$ (phase solide). La solution obtenue contient moins de 1% de la concentration initiale d'ions Co^{2+} et les ions Mn^{2+} .

On ne peut pas précipiter sélectivement les ions Ni^{2+} car $pK_s(Ni(OH)_2) = pK_s(Co(OH)_2)$, avec la même stœchiométrie : les ions Ni^{2+} précipitent avec les ions Co^{2+} .

III - Le moteur roue synchrone et son pilotage

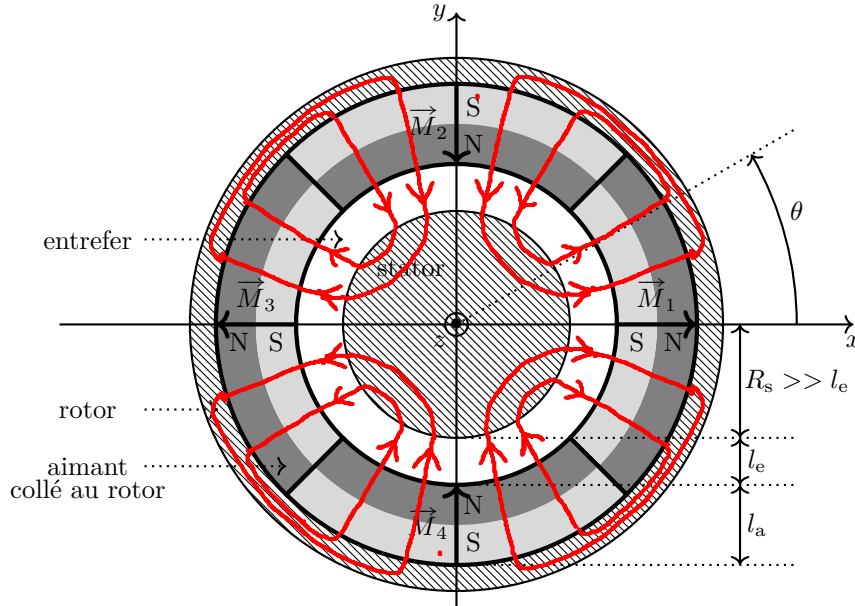
III.1 - Dimensionnement du moteur roue synchrone à aimants permanents

Q29) Les plans Oxz et Oyz sont des plans de symétrie pour les moments magnétiques $\vec{M}_{1,2,3,4}$. Il en va donc de même pour le champ magnétique créé par le rotor, dont les lignes de champ seront symétriques par rapport à ces plans.

Les plans bissecteurs des plans précédents sont eux des plans d'antisymétrie des vecteurs $\vec{M}_{1,2,3,4}$, donc du champ magnétique dont les lignes de champ sont donc perpendiculaires à ces plans.

Comme le plan Oxy est un plan de symétrie pour les moments magnétiques, et qu'il y a invariance par translation le long de l'axe Oz (les effets de bord sont négligés) les lignes de champ sont planes, contenues dans les plans de section droite.

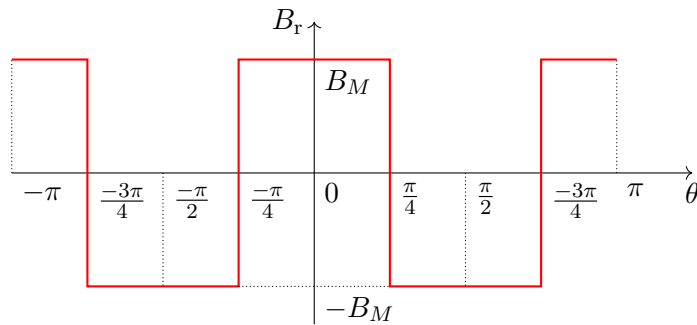
Les lignes de champ magnétiques sont donc des boucles confinées entre les plans Oxz et Oyz , Leur orientation est liée à l'orientation des moments magnétiques, puisqu'elles sont dirigées par ceux-ci (en l'absence de courant, $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}$ où $\mu_0 > 0$).



Q30) Le plan Oxz est plan de symétrie pour le champ magnétique donc $B_r(-\theta) = B_r(\theta)$: il s'agit d'une fonction paire de θ

Le plan Oyz est aussi plan de symétrie, donc $B_r(\pi - \theta) = B_r(\theta)$ et en utilisant la parité de B_r , $B_r(\theta - \pi) = B_r(\theta)$: $B_r(\theta)$ est π -périodique

Les plans $\theta = \pm\pi/4$ sont des plans d'antisymétrie pour le champ magnétique, donc $B_r(\pi/2 - \theta) = B_r(\theta)$. En supposant $|B_r(\theta)| = B_M$ uniforme et en utilisant le tracé qualitatif des lignes de champ, $B_r(\theta)$ est une fonction créneau paire de période π , de valeur $B_r(0) = B_M$ et présentant des discontinuités en $\theta = \pi/4[\pi/2]$.



Q31) Dans la configuration $\theta_r = 0$, en se limitant au fondamental du développement en série de Fourier de $B_r(\theta)$, on peut écrire, en utilisant sa parité et sa période π , $B_r(\theta) = B_1 \cos(2\theta)$. Comme le champ dans l'entrefer est perpendiculaire à la surface du stator ferromagnétique, donc

radial, on peut donc écrire dans l'entrefer pour $\theta_r = 0$

$$\vec{B}_r(\theta) = B_1 \cos(2\theta) \vec{e}_r$$

Si le rotor tourne d'un angle θ_r autour de Oz , le champ magnétique subit une rotation d'une même angle (le stator est invariant par rotation autour de Oz) : Pour une valeur θ_r , on retrouve en tout point M d'angle θ le champ magnétique obtenu pour $\theta_r = 0$ au point M' d'angle $\theta - \theta_r$:

$$\vec{B}_r(\theta, t, \theta_r) = \vec{B}_r(\theta - \theta_r, t, 0) = B_1 \cos(2(\theta - \theta_r)) \vec{e}_r$$

Q32) L'énergie magnétique dans l'entrefer a pour expression

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} dV = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} r dr d\theta dz$$

Le champ magnétique dépend que de la variable θ , donc on peut directement intégrer sur z , ce qui donne un facteur h et r , ce qui donne le facteur $[(R_s + l_e)^2 - R_s^2]/2 \approx R_s l_e$ car $l_e \ll R_s$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{em}} &= h R_s l_e \int_0^{2\pi} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} d\theta = \dots \\ &\dots \frac{h R_s l_e}{2\mu_0} \int_0^{2\pi} (B_1^2 \cos^2[2(\theta - \theta_r)] + B_0^2 \cos^2(p\theta - \omega t) + 2B_1 B_0 \cos[2(\theta - \theta_r)] \cos(p\theta - \omega t)) d\theta \end{aligned}$$

On sépare les trois termes à intégrer

$$\int_0^{2\pi} \cos^2[2(\theta - \theta_r)] d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos[4(\theta - \theta_r)]}{2} d\theta = \pi + \frac{1}{8} [\sin[4(\theta - \theta_r)]]_0^{2\pi} = \pi$$

car $\sin[4(\theta - \theta_r)]$ est de période $\pi/2$, diviseur de 2π . De même

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(p\theta - \omega t) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos[2p(\theta - \omega t)]}{2} d\theta = \pi + \frac{1}{4p} [\sin[2p(\theta - \omega t)]]_0^{2\pi} = \pi$$

car $\sin[2p(\theta - \omega t)]$ est de période π/p , diviseur de 2π puisque p est entier. La linéarisation du terme croisé donne

$$\cos[2(\theta - \theta_r)] \cos(p\theta - \omega t) = \frac{1}{2} (\cos[(2+p)\theta - 2\theta_r - \omega t] + \cos[(2-p)\theta + \omega t - 2\theta_r])$$

Comme $2+p$ est un entier non nul, l'intégrale du premier cosinus donne s'annule. Si $2-p \neq 0$, il en va de même de la seconde intégrale, tandis que si $2-p = 0$, la dépendance en θ du second cosinus disparaît, ce qui conduit à une valeur de l'intégrale égale à $\pi \cos(\omega t - 2\theta_r)$

Par conséquent, si $p \neq 2$

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{\pi h R_s l_e}{2\mu_0} (B_1^2 + B_0^2) = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2)$$

tandis que si $p = 2$

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2 + 2B_1 B_0 \cos(\omega t - 2\theta_r))$$

Pour que l'énergie magnétique dépende de la position θ_r du rotor, il faut choisir $p = 2$: le nombre de paires de bobines doit être égal au nombre de paires d'aimants.

Q33) On calcule alors le couple électromagnétique exercé sur le rotor :

$$\Gamma = \frac{\partial \mathcal{E}_{\text{em}}}{\partial \theta_r} = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin(\omega t - 2\theta_r)$$

Q34) Si $\theta_r = \Omega t - \alpha$, l'expression du couple devient

$$\Gamma = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin[(\omega - 2\Omega)t + 2\alpha]$$

Le couple moyen est non nul si $\Omega = \omega/2$: il s'agit de la condition de synchronisme, le facteur 2 provenant du nombre de paires d'aimants utilisés. Le couple moyen vaut alors

$$\Gamma = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} \sin(2\alpha)$$

Comme $\Omega > 0$, ce couple est moteur si $0 < \alpha < \pi/2$, donc si le rotor est en retard sur le champ magnétique tournant du stator.

Q35) Le couple est maximal si $\alpha = \pi/4$ et vaut

$$\Gamma_{\text{max}} = \frac{B_1 B_0 V_e}{\mu_0} = \frac{4B_M B_0 2\pi R_s l_e h}{\pi \mu_0} = \frac{8B_M B_0 R_s l_e h}{\mu_0}$$

L'énoncé donne $B_M = B_0 = 1,00 \text{ T}$, $R_s = 4,5 \text{ cm}$, $l_e = 0,7 \text{ mm}$, $h = 2 \text{ cm}$, d'où

$$\Gamma_{\text{max}} = 4,0 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cette valeur est insuffisante pour répondre au cahier des charges.

En dehors d'une augmentation des normes des champs magnétique ou des dimensions du moteur (en particulier R_s et h , dans la mesure où augmenter l_e conduit pour une même intensité dans les bobines statoriques à diminuer le champ magnétique), on peut envisager d'augmenter le nombre de paires d'aimants. Cette influence n'est pas directement visible sur l'expression du champ, qui a été explicitement établie pour 2 paires d'aimants.

En présence de n paires d'aimants, la période spatiale du champ rotorique B_r vaut $2\pi/n$, soit en se limitant au premier harmonique

$$B_r = B_1 \cos[n(\theta - \theta_r)]$$

ce qui implique pour obtenir une énergie magnétique dans l'entrefer dépendant de θ_r un champ statorique de la forme

$$B_r = B_1 \cos(n\theta - \omega t)$$

L'expression de l'énergie magnétique est analogue à celle obtenue précédemment

$$\mathcal{E}_{\text{em}} = \frac{V_e}{4\mu_0} (B_1^2 + B_0^2 + 2B_1 B_0 \cos(\omega t - n\theta_r))$$

où le nombre de paires d'aimants apparaît explicitement. L'expression du couple devient

$$\Gamma(\theta_r) = \frac{nB_1 B_0 V_e}{2\mu_0} \sin(\omega t - n\theta_r)$$

Si $\theta_r = \Omega t - \alpha$, la condition de synchronisme devient $\Omega = \omega/n$ et la valeur moyenne du couple

$$\Gamma = \frac{nB_1B_0V_e}{2\mu_0} \sin(n\alpha)$$

On constate donc que le couple moyen est proportionnel au nombre n de paires de pôles. Si on ne modifie ni les dimensions du moteur, ni les amplitudes B_1 et B_M , le passage de 2 paires de pôles à la valeur maximale de 8 paires, le couple maximal est multiplié par 4 :

$$\Gamma_{\max} = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Cette valeur reste insuffisante d'un facteur 3. Cependant la figure 15 montre que le rotor est couplé à un train épicycloïdal dont la sortie est liée à la roue. Il est ainsi possible d'augmenter le couple disponible sur la roue, en diminuant la vitesse (dans un modèle sans perte du train, la puissance $\Gamma\Omega$ est conservée entre l'entrée et la sortie du train). Il suffit d'utiliser un rapport de réduction en vitesse d'au moins 3 pour atteindre le couple maximal souhaité.

III.2 - L'onduleur MLI

Q36) La position permettant d'obtenir $v_{\text{ch}} = E$ est K_1 et K'_2 fermés, K'_1 et K_2 ouverts. Les positions complémentaires permettent d'obtenir $v_{\text{ch}} = -E$.

Les phases de tension nulle sont obtenues en mettant la charge en court-circuit, sans court-circuiter la source, ce qui correspond à l'une des configurations K_1 et K_2 fermés, K'_1 et K'_2 ouverts, et la configuration complémentaire.

Si on souhaite des durées d'ouverture et de fermeture de $T/2$ pour chacun des interrupteurs, on peut choisir l'une des deux séquences suivantes (qui ne se distinguent que par l'intervention des phases de roue libre)

intervalles de ωt	séquence 1				séquence 2				v_{ch}
	K_1	K_2	K'_1	K'_2	K_1	K_2	K'_1	K'_2	
$]0, \gamma_0[\cup]2\pi - \gamma_0, 2\pi[$	0	0	1	1	1	1	0	0	0
$] \gamma_0, \pi - \gamma_0[$	1	0	0	1	1	0	0	1	E
$] \pi - \gamma_0, \pi + \gamma_0[$	1	1	0	0	0	0	1	1	0
$] \pi + \gamma_0, 2\pi - \gamma_0[$	0	1	1	0	0	1	1	0	$-E$

Q37) L'harmonique de rang 3 est éliminé si $b_3 = \frac{1}{3} \cos(3\gamma_0) = 0$, ce qui impose, puisque $0 \leq \gamma_0 \leq \pi/2$, $3\gamma_0 = \pi/2$

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{6} ; t_0 = \frac{T}{12}$$

Le fondamental est un signal harmonique d'amplitude

$$\frac{4E}{\pi} b_1 = \frac{4E}{\pi} \cos \gamma_0$$

donc de valeur efficace

$$V_f = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{4E}{\pi} \cos \gamma_0 = \frac{2\sqrt{2} \cos \gamma_0}{\pi} E$$

La valeur efficace du signal vaut $V = \sqrt{\langle v_{\text{ch}}^2 \rangle}$.

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_{\text{ch}}^2 dt = \frac{1}{T} \left(\int_{t_0}^{T/2-t_0} E^2 dt + \int_{T/2+t_0}^{T-t_0} (-E^2) dt \right) = \left(1 - \frac{4t_0}{T} \right) E^2 = \left(1 - \frac{2\gamma_0}{\pi} \right) E^2$$

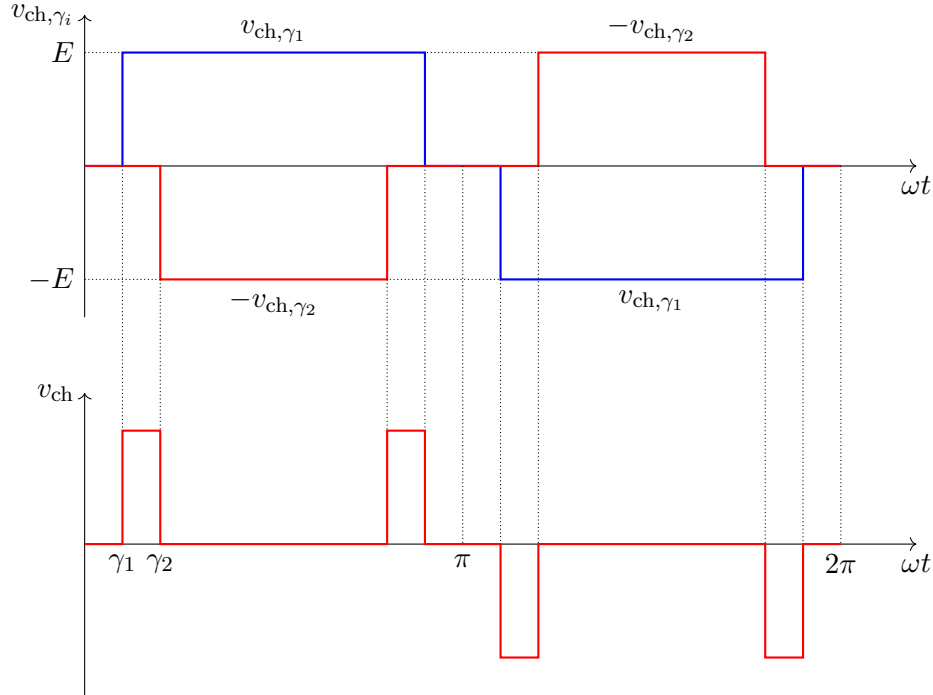
$$V = \sqrt{1 - \frac{2\gamma_0}{\pi}} E$$

Pour $\gamma_0 = \pi/6$

$$V_f = \frac{2\sqrt{2}E}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{6}E}{\pi} ; V = \sqrt{\frac{2}{3}} E$$

$$\tau_H = \sqrt{\frac{2E^2/3 - 6E^2/\pi^2}{6E^2/\pi^2}} = \sqrt{\frac{\pi^2}{9} - 1} = 0,31$$

Q38) Comme représenté ci-dessous, la combinaison $v_{\text{ch},\gamma_1}(t) - v_{\text{ch},\gamma_2}(t)$ permet d'obtenir les quatre impulsions correspondant aux intervalles $\gamma_1 < \omega t < \gamma_2$, $\pi - \gamma_2 < \omega t < \pi - \gamma_1$, $\pi + \gamma_1 < \omega t < \pi + \gamma_2$ et $2\pi - \gamma_2 < \omega t < 2\pi - \gamma_1$



En répétant cette démarche pour les autres impulsions, on exprime v_{ch} comme la superposition

$$v_{\text{ch}}(t) = v_{\text{ch},\gamma_1}(t) - v_{\text{ch},\gamma_2}(t) + v_{\text{ch},\gamma_3}(t) - v_{\text{ch},\gamma_4}(t) + v_{\text{ch},\gamma_5}(t) - v_{\text{ch},\gamma_6}(t)$$

Q39) On souhaite annuler les harmoniques de rang supérieur à 1 et inférieur à 13, soit $b_{2p+1} = 0$ pour $1 \leq p \leq 6$, ce qui impose 5 contraintes sur les valeurs des γ_i . La condition $V = E/\sqrt{2}$ impose une sixième contrainte, donc le choix des 6 valeurs $\gamma_{i=1,\dots,6}$ est soumis à 6 contraintes. Si ces contraintes sont indépendantes, il est possible de choisir les valeurs des γ_i de manière à respecter ces contraintes.

Comme les $v_{\text{ch},\gamma}$ ont la même période T le développement en série de Fourier de $v_{\text{ch}}(t)$ a pour expression

$$v_{\text{ch}}(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} b_{2p+1} \sin[(2p+1)\omega t]$$

où, en notant $2p+1 = q$:

$$b_q = \frac{\cos(q\gamma_1) - \cos(q\gamma_2) + \cos(q\gamma_3) - \cos(q\gamma_4) + \cos(q\gamma_5) - \cos(q\gamma_6)}{q}$$

L'annulation des harmoniques de rangs 3 à 11 impose les 5 équations

$$\cos(q\gamma_1) - \cos(q\gamma_2) + \cos(q\gamma_3) - \cos(q\gamma_4) + \cos(q\gamma_5) - \cos(q\gamma_6) = 0 ; \quad q = 3, 5, 7, 9, 11$$

La valeur efficace V vérifie

$$V^2 = \frac{1}{T} \int_0^T v_{\text{ch}}^2 dt$$

Chaque couple $(\gamma_{2p-1}, \gamma_{2p})$ où $p = 1, 2, 3$ donne 4 impulsions de hauteur $\pm E$ de durée $t_{2p} - t_{2p-1} = (\gamma_{2p} - \gamma_{2p-1})/\omega$ sur une période, v_{ch} étant nul sinon. Par conséquent

$$V^2 = \frac{4E^2}{\omega T} [(\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_4 - \gamma_3) + (\gamma_6 - \gamma_5)] = \frac{2E^2}{\pi} [(\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_4 - \gamma_3) + (\gamma_6 - \gamma_5)]$$

La condition $V = E/\sqrt{2}$ impose

$$(\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_4 - \gamma_3) + (\gamma_6 - \gamma_5) = \frac{\pi}{4}$$

Le système d'équation vérifié par $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6)$ s'écrit finalement

$$\left\{ \begin{array}{lclclclclclcl} \gamma_1 & - & \gamma_2 & + & \gamma_3 & - & \gamma_4 & + & \gamma_5 & - & \gamma_6 & = & -\frac{\pi}{4} \\ \cos(3\gamma_1) & - & \cos(3\gamma_2) & + & \cos(3\gamma_3) & - & \cos(3\gamma_4) & + & \cos(3\gamma_5) & - & \cos(3\gamma_6) & = & 0 \\ \cos(5\gamma_1) & - & \cos(5\gamma_2) & + & \cos(5\gamma_3) & - & \cos(5\gamma_4) & + & \cos(5\gamma_5) & - & \cos(5\gamma_6) & = & 0 \\ \cos(7\gamma_1) & - & \cos(7\gamma_2) & + & \cos(7\gamma_3) & - & \cos(7\gamma_4) & + & \cos(7\gamma_5) & - & \cos(7\gamma_6) & = & 0 \\ \cos(9\gamma_1) & - & \cos(9\gamma_2) & + & \cos(9\gamma_3) & - & \cos(9\gamma_4) & + & \cos(9\gamma_5) & - & \cos(9\gamma_6) & = & 0 \\ \cos(11\gamma_1) & - & \cos(11\gamma_2) & + & \cos(11\gamma_3) & - & \cos(11\gamma_4) & + & \cos(11\gamma_5) & - & \cos(11\gamma_6) & = & 0 \end{array} \right.$$