

CCMP PSI 2025 Physique 2

Oscillations mécaniques et électriques

Corrigé proposé par Nicolas Choimet, PSI* Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

I. Oscillateur mécanique

Q1 La force de rappel élastique subie par la masse est donnée par $\mathbf{F} = -k(\ell - \ell_0)\mathbf{u}_z$. Lorsque le ressort s'allonge de $d\ell$, le travail de cette force est donné par $\delta W = \mathbf{F} \cdot d\ell \mathbf{u}_z$ ce qu'on peut mettre sous la forme :

$$\delta W = -k(\ell - \ell_0) d\ell = -k(\ell - \ell_0) d(\ell - \ell_0) = -d\left[\frac{k(\ell - \ell_0)^2}{2}\right]$$

Par définition de l'énergie potentielle, $\delta W = -d\mathcal{E}_{p,k}$. Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{p,k} = \frac{k(\ell - \ell_0)^2}{2}$$

où l'on a choisi $\mathcal{E}_{p,k} = 0$ lorsque $\ell = \ell_0$.

Q2 On procède de même :

$$\delta W = m\mathbf{g} \cdot d\ell \mathbf{u}_z = mg d\ell = d(mg\ell)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{p,p} = -mg\ell$$

où l'on a choisi $\mathcal{E}_{p,p} = 0$ lorsque $\ell = 0$.

Q3 Par définition de l'énergie mécanique,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,k} = \frac{m\dot{\ell}^2(t)}{2} + \frac{k(\ell(t) - \ell_0)^2}{2} - mg\ell(t)$$

Q4 Le système étant conservatif, son énergie mécanique est constante. Par conséquent :

$$m\ddot{\ell}(t) + k(\ell(t) - \ell_0) = mg$$

Ce qu'on peut récrire sous la forme :

$$\ddot{\ell}(t) + \frac{k}{m}\ell(t) = g + \frac{k\ell_0}{m}$$

Q5 Posons $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{k/m}$. La solution générale de l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ell(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \ell_0 + mg/k$$

Les deux conditions initiales donnent :

$$\ell(t) = (L - \ell_0 - mg/k) \cos(\omega_0 t) + \ell_0 + mg/k$$

La valeur minimale de $\ell(t)$ est atteinte pour $t = \pi/\omega_0$ et vaut $\ell_{\min} = 2(\ell_0 + mg/k) - L$.
La masse ne heurtera pas le support si $\ell_{\min} > 0$ c'est-à-dire si :

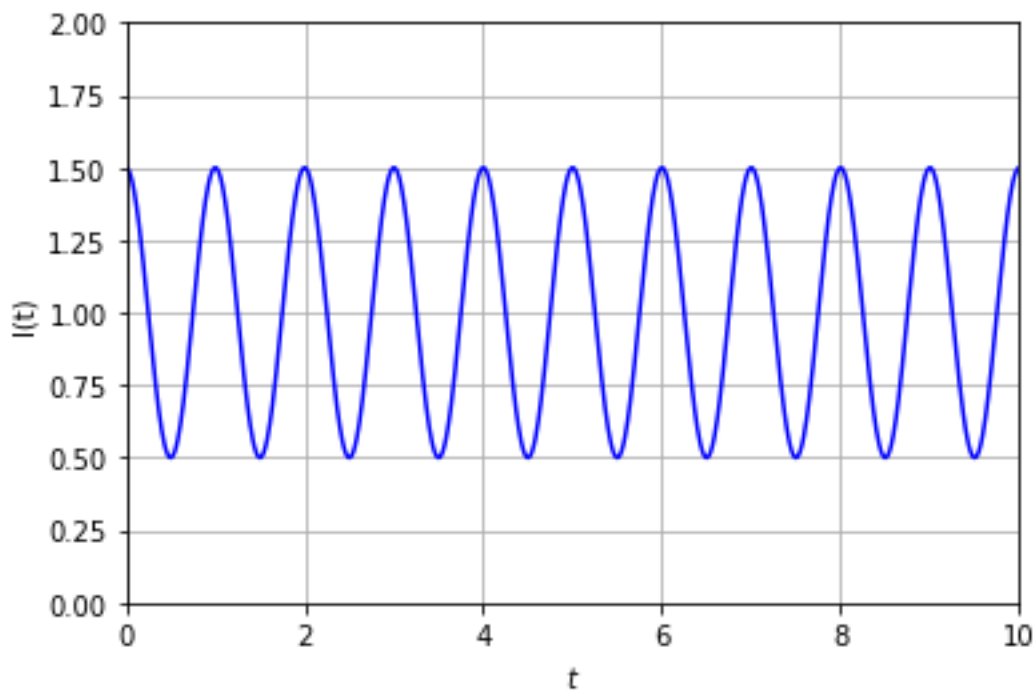
$$L < 2(\ell_0 + mg/k)$$

Le mouvement est alors sinusoïdal de période $T_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$ et $\ell(t)$ oscille entre $\ell_{\max} = L$ et $\ell_{\min} = 2(\ell_0 + mg/k) - L$.

Numériquement, la période vaut :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0,3}{0,3 \times \pi^2}} = 2 \text{ s}$$

L'allure de la courbe représentative de $\ell(t)$ est la suivante :



Q6 L'énergie potentielle de pesanteur de la tranche $[z, z + dz]$ de ressort, de masse $dm_r = m_r dz/\ell$, vaut :

$$d\mathcal{E}_{p,p} = -dm_r g z = -\frac{m_r g}{\ell} z dz$$

En intégrant entre 0 et ℓ , on obtient :

$$\mathcal{E}_{p,p} = -\frac{m_r g \ell}{2}$$

Q7 La vitesse étant proportionnelle à z , on sait que $\dot{z} = \alpha z$ et que $\dot{\ell} = \alpha \ell$. Par conséquent : $\dot{z} = \dot{\ell} z/\ell$. L'énergie cinétique de la tranche $[z, z + dz]$ de ressort vaut donc :

$$d\mathcal{E}_c = \frac{dm_r \dot{z}^2}{2} = \frac{m_r \dot{\ell}^2}{2\ell^3} z^2 dz$$

En intégrant entre 0 et ℓ , on obtient :

$$\mathcal{E}_c = \frac{m_r \dot{\ell}^2}{6}$$

Q8 L'énergie mécanique du système masse-ressort s'écrit donc :

$$\mathcal{E}_m = \left(m + \frac{m_r}{3}\right) \frac{\dot{\ell}^2(t)}{2} + \frac{k(\ell(t) - \ell_0)^2}{2} - \left(m + \frac{m_r}{2}\right) g \ell(t)$$

Q9 Le système étant toujours conservatif, on obtient après dérivation :

$$\left(m + \frac{m_r}{3}\right) \ddot{\ell}(t) + k(\ell(t) - \ell_0) = \left(m + \frac{m_r}{2}\right) g$$

ce qu'on peut récrire sous la forme :

$$\ddot{\ell}(t) + \omega_1^2 \ell(t) = \left(\frac{m + \frac{m_r}{2}}{m + \frac{m_r}{3}}\right) g + \frac{k \ell_0}{m + \frac{m_r}{3}}$$

avec :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m + \frac{m_r}{3}} < \frac{k}{m}$$

La pulsation propre est donc plus basse, ce qui traduit l'augmentation de l'inertie du système.

Q10 On procède comme à la question Q5 et on obtient :

$$\ell(t) = \left(L - \ell_0 - \frac{\left(m + \frac{m_r}{2}\right) g}{k}\right) \cos(\omega_1 t) + \ell_0 + \frac{\left(m + \frac{m_r}{2}\right) g}{k}$$

La nature du mouvement est inchangée. La période des oscillations est donnée par :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m + \frac{m_r}{3}}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}} = T_0 \sqrt{1 + \frac{m_r}{3m}} \approx T_0 \left(1 + \frac{m_r}{6m}\right)$$

Numériquement, cela donne :

$$T_1 \approx 2 \times \left(1 + \frac{36}{1800}\right) = 2,04 \text{ s}$$

Q11 L'écart relatif est inférieur à 1% si :

$$\frac{T_1 - T_0}{T_0} = \frac{m_r}{6m} < 0,01$$

c'est-à-dire si $m_r < 18 \text{ g}$.

Q12 Le mouvement étant maintenant horizontal, la pesanteur n'intervient plus. L'énergie potentielle est purement élastique. La seule force qui travaille est la projection

sur $\mathbf{u}_x$ de la force de rappel du ressort dont la longueur est donnée par $\sqrt{\ell_c^2 + x^2}$. Cette projection s'écrit :

$$F_x = -k \left(\sqrt{\ell_c^2 + x^2} - \ell_0 \right) \frac{x}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} = -k \left(x - \frac{\ell_0 x}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right)$$

Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = F_x dx = -k \left(x - \frac{\ell_0 x}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right) dx = -d \left(\frac{kx^2}{2} - k\ell_0 \sqrt{\ell_c^2 + x^2} + \text{cste} \right)$$

Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{p,P} = \frac{kx^2}{2} - k\ell_0 \sqrt{\ell_c^2 + x^2} + \text{cste}$$

L'énoncé impose (on se demande bien pourquoi...) la condition $\mathcal{E}_{p,P} = 0$ lorsque $\ell = \sqrt{\ell_c^2 + x^2} = \ell_0$. Cette condition correspond à $x^2 = \ell_0^2 - \ell_c^2$ (ce qui suppose au passage que $\ell_0 > \ell_c$). Par conséquent :

$$\mathcal{E}_{p,P} = \frac{k(x^2 + \ell_c^2 - \ell_0^2)}{2} - k\ell_0 \left(\sqrt{\ell_c^2 + x^2} - \ell_0 \right)$$

Q13 Les positions d'équilibre sont données par les extrema de l'énergie potentielle. Calculons donc sa dérivée par rapport à x :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right)$$

On obtient donc trois positions d'équilibre :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_{\pm} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2} \end{cases}$$

Les abscisses $x_{\pm}$ ne sont définies que si $\ell_0 > \ell_c$.

Pour préciser l'allure des courbes, on peut calculer la dérivée seconde de $\mathcal{E}_{p,P}$ ou en chercher un équivalent au voisinage de 0 et de $x_{\pm}$:

- Au voisinage de 0 (on laisse tomber les constantes, sans intérêt) :

$$\mathcal{E}_{p,P} = \frac{kx^2}{2} - k\ell_0 \ell_c \sqrt{1 + \frac{x^2}{\ell_c^2}} \approx \frac{kx^2}{2} \left(1 - \frac{\ell_0}{\ell_c} \right)$$

Si $\ell_0 > \ell_c$ (ressort comprimé en $x_0 = 0$), $\mathcal{E}_{p,P}$ se comporte localement comme une parabole dont la concavité est tournée vers le bas : la position $x_0 = 0$ est un maximum local de $\mathcal{E}_{p,P}$. Cette position est instable.

Si $\ell_0 < \ell_c$ (ressort allongé en $x_0 = 0$), $\mathcal{E}_{p,p}$ se comporte localement comme une parabole dont la concavité est tournée vers le haut : la position $x_0 = 0$ est un minimum local de $\mathcal{E}_{p,p}$. Cette position est stable.

- Au voisinage de $x_{\pm}$ (solutions requérant la condition $\ell_0 > \ell_c$) :

Là, il vaut mieux passer par la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{p,p}}{dx^2} = k \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} + \frac{\ell_0 x^2}{(\ell_c^2 + x^2)^{3/2}} \right)$$

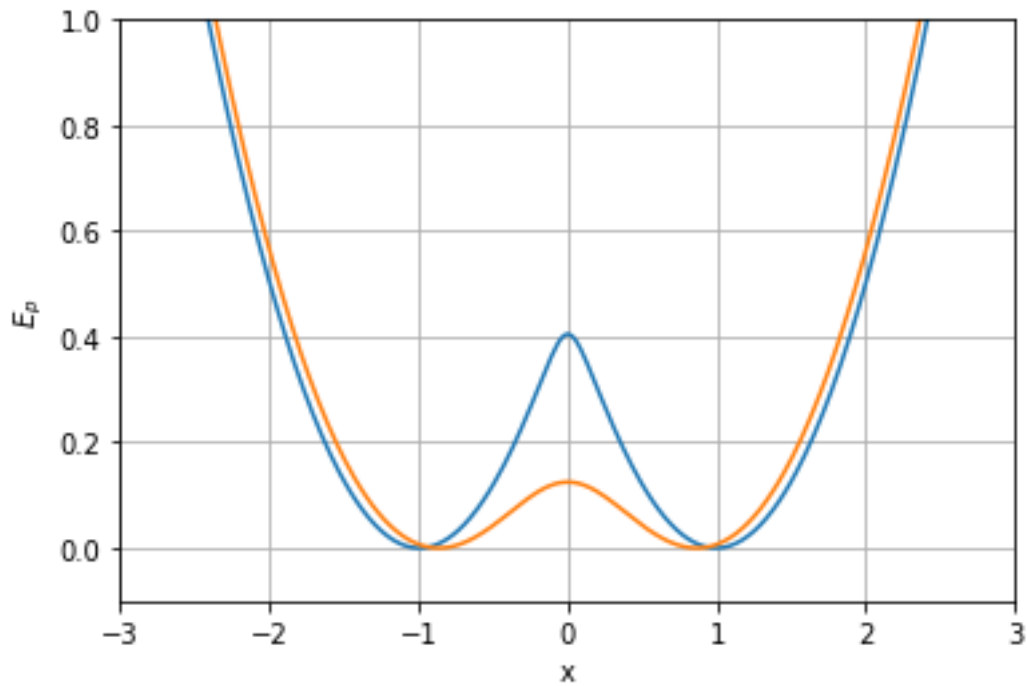
En $x_{\pm} = \pm \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2}$, $\ell_c^2 + x^2 = \ell_0^2$. Par conséquent :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_{p,p}}{dx^2}(x_{\pm}) = k \left(1 - \frac{\ell_c^2}{\ell_0^2} \right)$$

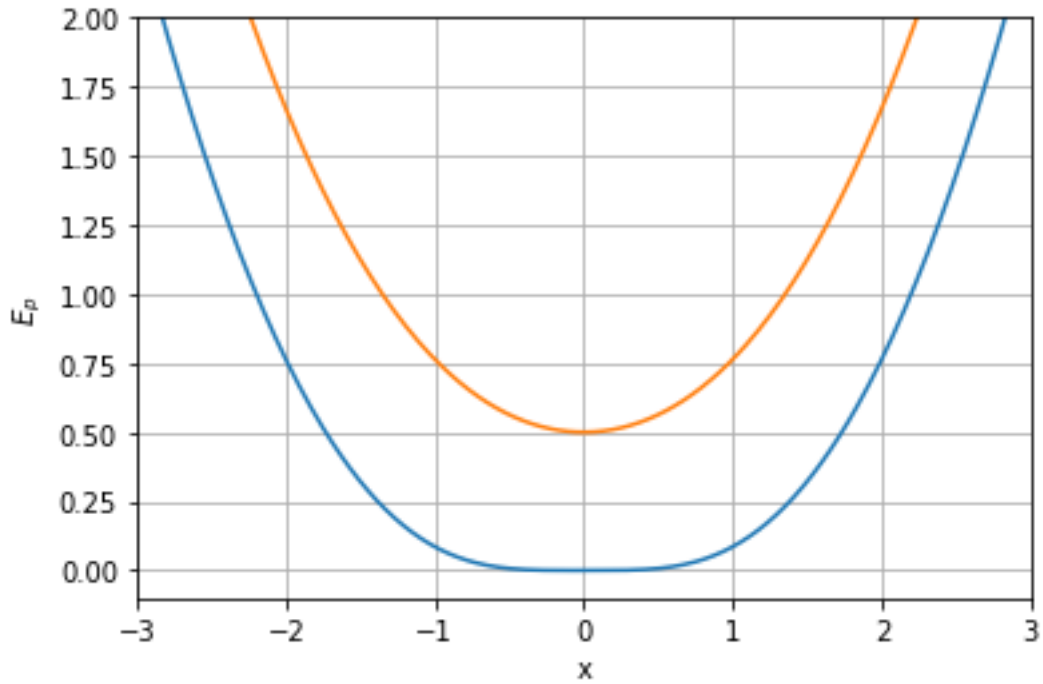
Comme $\ell_0 > \ell_c$, la dérivée seconde est positive : les positions $x_{\pm}$ sont des minima locaux de $\mathcal{E}_{p,p}$ et l'équilibre y est stable.

On en déduit les courbes suivantes :

- $\ell_c/\ell_0 = 0,1$ et $0,5$:



- $\ell_c/\ell_0 = 1$ et 2 :



Q14 On ne peut parler de barrière de potentiel que dans le cas $\ell_0 > \ell_c$. Sa hauteur vaut :

$$U_b = \mathcal{E}_{p,P}(0) - \mathcal{E}_{p,P}(x_{\pm}) = \frac{k(\ell_0 - \ell_c)^2}{2}$$

On remarque au passage que $\mathcal{E}_{p,P}(x_{\pm}) = 0$ avec la convention imposée.

Q15 L'énergie mécanique du point matériel s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k(x^2 + \ell_c^2 - \ell_0^2)}{2} - k\ell_0 \left(\sqrt{\ell_c^2 + x^2} - \ell_0 \right)$$

En dérivant $\mathcal{E}_m$ par rapport au temps, on obtient :

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2(t)}} \right) = 0$$

Cette équation n'est évidemment plus linéaire.

La composante selon $\mathbf{u}_x$ de la force de rappel élastique est donnée par :

$$F_x = -\frac{d\mathcal{E}_{p,P}}{dx} = -kx \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x^2}} \right)$$

Q16 L'équation différentielle du mouvement, qui est d'ordre 2, est équivalente au système différentiel suivant, du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t) = u_1(t) \\ \dot{u}_1(t) = -\omega_0^2 u_0(t) \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + u_0^2(t)}} \right) \end{cases}$$

On discrétise le système en écrivant :

$$\begin{cases} \dot{u}_0(t_n) = \frac{u_{0,n+1} - u_{0,n}}{\Delta t} \\ \dot{u}_1(t_n) = \frac{u_{1,n+1} - u_{1,n}}{\Delta t} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} u_{0,n+1} = u_{0,n} + \Delta t u_{1,n} \\ u_{1,n+1} = u_{1,n} - \omega_0^2 \Delta t u_{0,n} \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + u_{0,n}^2}} \right) \end{cases}$$

Les valeurs de $u_{0,0}$ et $u_{1,0}$ dépendent des conditions initiales :

$$\begin{cases} u_{0,0} = x(0) \\ u_{1,0} = \dot{x}(0) \end{cases}$$

Q17 Commençons par remarquer que l'on est dans le cas $\ell_0 > \ell_c$.

- Dans le cas A, on observe des oscillations périodiques non sinusoïdales d'amplitude 2 m et de période 3,5 s, autour de la position $x_0 = 0$.
- Dans le cas B, on observe des oscillations quasi-sinusoïdales d'amplitude 2 cm et de période 2 s, centrées autour de la position $x_+ = 98$ cm.

Q18 Etant donné que $\ell_0 > \ell_c$, que la valeur moyenne de x est positive dans le cas B et que le système oscille autour de cette moyenne avec une faible amplitude, on peut déduire que :

$$\langle x(t) \rangle = x_+ = \sqrt{\ell_0^2 - \ell_c^2}$$

Numériquement, cela donne :

$$\langle x(t) \rangle = \sqrt{1^2 - 0,2^2} = \sqrt{1 - 0,04} \approx 1 - 0,04/2 = 0,98 \text{ m}$$

Cette valeur coïncide parfaitement avec la valeur lue sur la figure 3.

Pour calculer la période temporelle, posons $x(t) = x_+ + \varepsilon(t)$ où $|\varepsilon(t)| \ll x_+$ et linéarisons l'équation différentielle. Celle-ci devient :

$$m\ddot{\varepsilon}(t) + k(x_+ + \varepsilon(t)) \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + (x_+ + \varepsilon(t))^2}} \right) = 0$$

Or,

$$\frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + (x_+ + \varepsilon(t))^2}} \approx \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + x_+^2 + 2x_+\varepsilon(t)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2x_+\varepsilon(t)}{\ell_0^2}}} \approx 1 - \frac{x_+\varepsilon(t)}{\ell_0^2}$$

A l'ordre 1, on obtient :

$$\begin{aligned} (x_+ + \varepsilon(t)) \left(1 - \frac{\ell_0}{\sqrt{\ell_c^2 + (x_+ + \varepsilon(t))^2}} \right) &\approx (x_+ + \varepsilon(t)) \left(\frac{x_+ \varepsilon(t)}{\ell_0^2} \right) \approx \left(\frac{x_+^2}{\ell_0^2} \right) \varepsilon(t) \\ &= \left(1 - \frac{\ell_c^2}{\ell_0^2} \right) \varepsilon(t) \end{aligned}$$

L'équation différentielle s'écrit donc :

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \omega_0^2 \left(1 - \frac{\ell_c^2}{\ell_0^2} \right) \varepsilon(t) = 0$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique, ce qui est en accord avec l'allure sinusoïdale des courbes observées dans le cas B. La période du mouvement est donnée par :

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \ell_c^2/\ell_0^2}}$$

Numériquement, on trouve :

$$T_2 = \frac{2}{\sqrt{1 - 0,04}} \approx 2(1 + 0,04/2) = 2,04 \text{ s}$$

Cette valeur est également en très bon accord avec la valeur lue sur la figure 3.

Les approximations effectuées (linéarisation de l'équation différentielle) sont donc pleinement validées.

Q19 Pour être dans le cas A, il faut que l'énergie mécanique du système soit suffisante pour lui permettre de franchir la barrière de potentiel U_b en $x = 0$ déterminée en Q14. L'énergie potentielle dans la position $x = 0$ vaut :

$$\mathcal{E}_{p,P}(0) = \frac{k(\ell_c^2 - \ell_0^2)}{2} - k\ell_0(\ell_c - \ell_0) = \frac{k(\ell_0 - \ell_c)^2}{2} = U_b$$

L'énergie mécanique du point matériel, avec les conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$ vaut :

$$\mathcal{E}_m = \frac{k(X_0^2 + \ell_c^2 - \ell_0^2)}{2} - k\ell_0 \left(\sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} - \ell_0 \right)$$

Pour être dans le cas A, il faut que $\mathcal{E}_m > U_b$, soit :

$$\frac{k(X_0^2 + \ell_c^2 - \ell_0^2)}{2} - k\ell_0 \left(\sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} - \ell_0 \right) > \frac{k(\ell_0 - \ell_c)^2}{2}$$

ce qui peut s'écrire sous la forme :

$$X_0^2 - 2\ell_0 \sqrt{\ell_c^2 + X_0^2} + 2\ell_0 \ell_c > 0$$

En écrivant cette inéquation sous la forme $X_0^2 + 2\ell_0\ell_c > 2\ell_0\sqrt{\ell_c^2 + X_0^2}$ et en l'élevant au carré, on aboutit, après quelques menus calculs à la condition :

$$X_0 > 2\ell_0\sqrt{1 - \ell_c/\ell_0}$$

Calculons la valeur critique $X_{0,c}$ de X_0 (question non demandée) :

$$X_{0,c} = 2\ell_0\sqrt{1 - \ell_c/\ell_0} = 2 \times 1 \times \sqrt{1 - 0,2} = 2 \sqrt{\frac{80}{100}} \approx \frac{2 \times 9}{10} = 1,8 \text{ m}$$

Cette valeur est en accord avec la valeur $X_0 = 2 \text{ m}$ correspondant au cas A.

Q20 On remarque sur la figure 4 que les courbes sont celles de fonctions impaires. Le polynôme impair de plus bas degré est bien de la forme :

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,p}}{dx} = \alpha_m x + \beta_m x^3$$

Dans les deux cas, ce polynôme doit tendre vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et il doit tendre vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$. On en déduit que dans les deux cas, $\beta_m > 0$.

Pour $\ell_0 > \ell_c$, la dérivée en 0 doit être négative donc $\alpha_m < 0$.

Pour $\ell_0 < \ell_c$, la dérivée en 0 doit être positive donc $\alpha_m > 0$.

L'équation du mouvement est donnée par le PFD :

$$m\ddot{x} = -\frac{d\mathcal{E}_{p,p}}{dx}$$

Par conséquent,

$$m\ddot{x}(t) + \alpha_m x(t) + \beta_m x^3(t) = 0$$

II. Oscillateur électrique

Q21 Introduisons quelques notations :

- Intégrateur 1 de constante de temps $R_1 C_1$: tension d'entrée $x(t)$, tension de sortie $s_1(t)$;
- Inverseur de gain -1 : tension d'entrée $s_1(t)$; tension de sortie $-s_1(t)$;
- Intégrateur 2 de constante de temps $R_2 C_2$: tension d'entrée $-s_1(t)$, tension de sortie $x(t)$.

Faisons l'hypothèse du régime sinusoïdal forcé pour faciliter les calculs. On peut alors écrire :

$$\underline{x}(t) = -\frac{1}{jR_2 C_2 \omega} \left(-\underline{s}_1(t) \right) = \frac{\underline{s}_1(t)}{jR_2 C_2 \omega} = \frac{1}{jR_2 C_2 \omega} \left(-\frac{\underline{x}(t)}{jR_1 C_1 \omega} \right) = -\frac{\underline{x}(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2 (j\omega)^2}$$

Par conséquent :

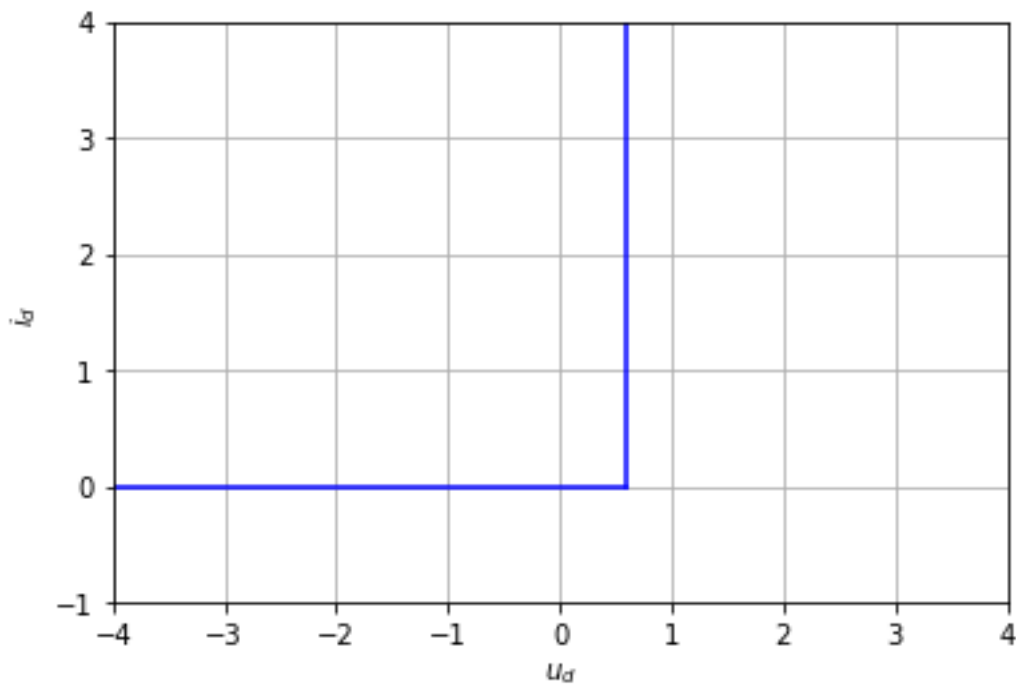
$$(j\omega)^2 \underline{x}(t) + \frac{\underline{x}(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

L'équation différentielle demandée s'écrit donc :

$$\ddot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}$.

Q22 Caractéristique de la diode :

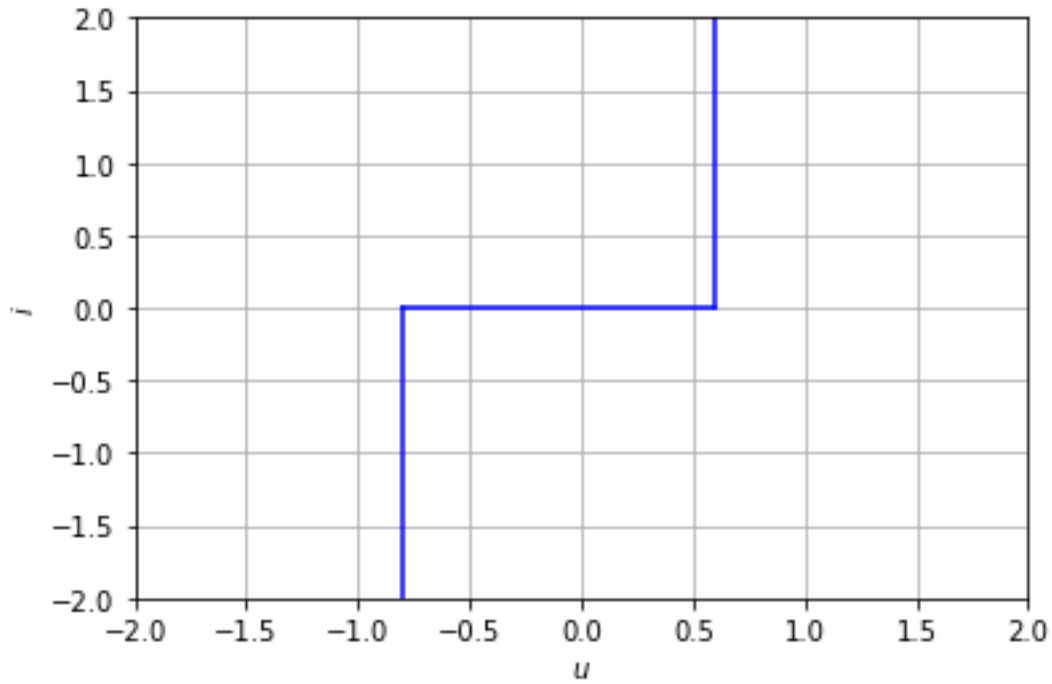


Examinons maintenant le dipôle tête-bêche.

- Lorsque $i > 0$, la diode D_1 est passante tandis que la diode D_2 est bloquée. Par conséquent, $u = V_{D_1} > 0$.
- Lorsque $i < 0$, la diode D_2 est passante tandis que la diode D_1 est bloquée. Par conséquent, $u = -V_{D_2} < 0$ (attention aux conventions d'orientation).
- Lorsque $i = 0$, les deux diodes sont bloquées et $-V_{D_2} < u < V_{D_1}$.

Il est évident qu'il est impossible que les deux diodes soient simultanément passantes.

On en déduit la caractéristique $i(u)$:



Q23 Commençons par la relation liant v^+ et e , qui est toujours vraie :

$$v^+ = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e$$

Il y a trois cas à distinguer :

- D_1 passante et D_2 bloquée

Dans ce cas, $v^- - s = V_D > 0$. La condition $v^+ = v^-$ donne :

$$s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e - V_D$$

- D_1 bloquée et D_2 passante

Dans ce cas, $v^- - s = -V_D < 0$. La condition $v^+ = v^-$ donne :

$$s = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e + V_D$$

- D_1 et D_2 bloquées

Tout le courant circulant dans R_3 traverse R_6 . La loi des nœuds donne :

$$v^- = \frac{R_6 e + R_3 s}{R_3 + R_6}$$

La condition $v^+ = v^-$ donne :

$$s = \left[\frac{R_3 R_5 - R_4 R_6}{R_3 (R_4 + R_5)} \right] e$$

- Délimitation du régime D_1 et D_2 bloquées

Ce régime suppose la condition $-V_D < v^- - s < V_D$. La condition $v^+ = v^-$ permet toujours d'écrire :

$$v^- = \left(\frac{R_5}{R_4 + R_5} \right) e$$

La double inégalité s'écrit alors :

$$-\left[\frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_4 R_6} \right] V_D < e < \left[\frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_4 R_6} \right] V_D$$

On en déduit les domaines de validité des deux autres régimes de fonctionnement :

- D_1 passante et D_2 bloquée

$$e \geq \left[\frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_4 R_6} \right] V_D$$

- D_1 bloquée et D_2 passante

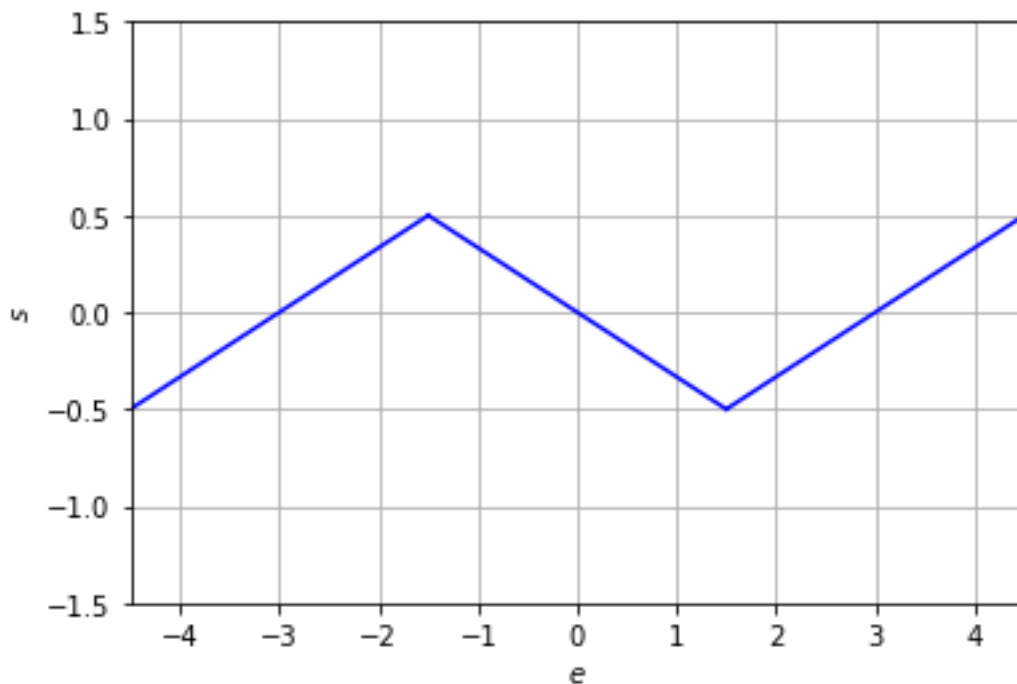
$$e \leq -\left[\frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_4 R_6} \right] V_D$$

Q25 Avec les valeurs données par l'énoncé, on obtient les équations suivantes :

$$s = \begin{cases} e/3 + V_D & \text{si } e \leq -3V_D/2 \\ -e/3 & \text{si } -3V_D/2 \leq e \leq 3V_D/2 \\ e/3 - V_D & \text{si } e \geq 3V_D/2 \end{cases}$$

On a deux points anguleux de coordonnées $(-3V_D/2, V_D/2)$ et $(3V_D/2, -V_D/2)$. La tension de sortie s'annule pour $e = -3V_D, 0$ et $3V_D$.

La caractéristique $s(e)$ est la suivante (pour $V_D = 1$ V) :



Q26 L'allure est globalement la même, sauf que les points anguleux sont arrondis. Cela est probablement dû à la commutation non instantanée des diodes et aussi au fait que les portions de caractéristiques des diodes ne sont pas verticales mais plutôt des exponentielles fortement croissantes.

La pente relevée sur la portion centrale est de l'ordre de $-400 \text{ mV}/1,2 \text{ V} \approx -1/3$. La tension de sortie s'annule pour $e \approx \pm 1,8 \text{ V}$. On en déduit $V_D \approx 600 \text{ mV}$. Les extrema culminent à un peu moins de $\pm 300 \text{ mV}$: cela est dû au caractère arrondi des points anguleux.

Q27 La pente en $e = 0$ s'identifie à α_e . Par conséquent, $\alpha_e \approx -1/3 \approx -0,3$.

D'autre part, $h_{\text{exp}}(1,8 \text{ V}) = 0 = -1/3 \times 1,8 + \beta_e \times 1,8^3$. On en déduit : $\beta_e \approx 1/9,7 \approx 0,1 \text{ V}^{-2}$. On a donc :

$$h_{\text{exp}}(e) \approx -0,3e + 0,1e^3$$

Q28 Comme à la question Q21, on peut écrire :

$$\ddot{x}(t) + \frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

Or, $s(t) = \alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)$. Par conséquent :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = 0$$

D'après la question Q23,

$$\alpha_e = \frac{R_3 R_5 - R_4 R_6}{R_3(R_4 + R_5)}$$

Pour avoir $\alpha_e < 0$, il faut que $R_3 R_5 - R_4 R_6 < 0$ c'est-à-dire :

$$R_5 < 1 \text{ k}\Omega$$

Q29 Nommons $s_1(t)$ la tension de sortie du premier intégrateur. On a la relation :

$$s_1(t) = R_2 C_2 \dot{x}(t)$$

Il suffit donc de relever $s_1(t)$, tension de sortie du premier intégrateur.

Pour imposer les valeurs souhaitées à $x(0)$ et $\dot{x}(0)$, il suffit de charger les condensateurs C_2 et C_1 aux valeurs souhaitées (via une source de tension extérieure, en isolant les condensateurs du montage via des interrupteurs que l'on referme à $t = 0$). En effet, la tension aux bornes de C_2 n'est autre que $x(t)$ et la tension aux bornes de C_1 est $s_1(t) = R_2 C_2 \dot{x}(t)$.

Q30 La loi des nœuds donne facilement (étant donné que l'on a toujours $v^- = v^+ = 0$:

$$\frac{s(t)}{R_1} + I_p^- + C_1 \dot{z}(t) = 0$$

Par conséquent :

$$\dot{z}(t) = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

Avec $s(t) = S_0 \sin(\omega t)$, on obtient :

$$\dot{z}(t) = -\frac{S_0 \sin(\omega t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

On en déduit :

$$z(t) = \frac{S_0 \cos(\omega t)}{R_1 C_1 \omega} - \frac{I_p^- t}{C_1} + A$$

A $t = 0$, le condensateur est déchargé donc $z(0) = 0$. Par conséquent, $A = -S_0/R_1 C_1 \omega$.
On en déduit :

$$z(t) = \frac{S_0}{R_1 C_1 \omega} (\cos(\omega t) - 1) - \frac{I_p^- t}{C_1}$$

Le terme $-I_p^- t/C_1$ entraîne une dérive de la tension de sortie de l'intégrateur qui va rapidement saturer en tension.

Q 31 En présence de la résistance R_7 placée en parallèle sur C_1 , la loi des nœuds s'écrit :

$$\frac{s(t)}{R_1} + I_p^- + C_1 \dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7} = 0$$

On doit alors résoudre :

$$\dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7 C_1} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1}$$

La solution générale de l'équation homogène s'écrit $z_h(t) = A \exp(-t/R_7 C_1)$.

Pour déterminer la solution particulière, on utilise le théorème de superposition, l'équation étant linéaire. La solution particulière associée à I_p^- s'écrit $z_{p,1}(t) = -R_7 I_p^- = \text{cste}$. C'est bien une solution de $\dot{z}(t) + z(t)/R_7 C_1 = -I_p^-/C_1$.

Pour déterminer la solution particulière associée à $S_0 \sin(\omega t)$, il s'agit de trouver la solution en RSF de l'équation

$$\dot{z}(t) + \frac{z(t)}{R_7 C_1} = -\frac{S_0 \sin(\omega t)}{R_1 C_1}$$

Le mieux est de passer en notation complexe :

$$(1 + j\omega R_7 C_1) \underline{z_{p,2}} = j \frac{R_7 S_0 \exp(j\omega t)}{R_1}$$

On en déduit :

$$\underline{z_{p,2}} = \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{j \exp(j\omega t)}{1 + j\omega R_7 C_1} \right) = \frac{R_7 S_0}{R_1} \frac{(j \cos(\omega t) - \sin(\omega t))(1 - j\omega R_7 C_1)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2}$$

Il reste à prendre la partie réelle :

$$z_{p,2}(t) = \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{\omega R_7 C_1 \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2} \right)$$

Conclusion : la solution complète s'écrit :

$$z(t) = A \exp(-t/R_7 C_1) - R_7 I_p^- + \frac{R_7 S_0}{R_1} \left(\frac{\omega R_7 C_1 \cos(\omega t) - \sin(\omega t)}{1 + \omega^2 R_7^2 C_1^2} \right)$$

La dérive que l'on avait précédemment n'est plus qu'un simple décalage (très faible compte tenu de la très faible valeur de I_p^-).

Une fois le régime transitoire éteint, on n'a plus que :

$$z(t) = -R_7 I_p^- + Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Q32 On observe des oscillations quasi-sinusoidales amorties (cet amortissement n'a pas été pris en compte dans les calculs précédents).

La valeur finale atteinte doit correspondre à $-R_7 I_p^- \approx \pm 2$ V. On observe un saut curieux sur $z(t)$ que je ne vois pas comment interpréter. Le système semble sensible aux conditions initiales...

Q33 Les équations régissant les deux intégrateurs s'écrivent :

$$\begin{cases} \dot{s}_1(t) + \frac{s_1(t)}{R_7 C_1} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1} - \frac{I_p^-}{C_1} \\ \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_8 C_2} = \frac{s_1(t)}{R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_2} \end{cases}$$

En dérivant la seconde équation et en y injectant la première, on obtient :

$$\ddot{x}(t) + \frac{\dot{x}(t)}{R_8 C_2} = \frac{\dot{s}_1(t)}{R_2 C_2} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} - \frac{s_1(t)}{R_7 C_1 R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_1 R_2 C_2}$$

Or,

$$\frac{s_1(t)}{R_7 C_1 R_2 C_2} = \frac{\dot{x}(t)}{R_7 C_1} + \frac{x(t)}{R_7 C_1 R_8 C_2} + \frac{I_p^-}{C_2 R_7 C_1}$$

Par conséquent :

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{1}{R_8 C_2} + \frac{1}{R_7 C_1} \right) \dot{x}(t) + \frac{x(t)}{R_7 C_1 R_8 C_2} = -\frac{s(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} - \frac{I_p^-}{C_1 C_2} \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right)$$

D'autre part, $s(t) = \alpha_e x(t) + \beta_e x^3(t)$. On en déduit :

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{1}{R_8 C_2} + \frac{1}{R_7 C_1} \right) \dot{x}(t) + \left(\frac{\alpha_e}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_7 R_8} \right) \frac{x(t)}{C_1 C_2} + \frac{\beta_e x^3(t)}{R_1 C_1 R_2 C_2} = -\frac{I_p^-}{C_1 C_2} \left(\frac{1}{R_7} + \frac{1}{R_8} \right)$$

Compte tenu du fait que $R_1 = R_2$, $C_1 = C_2$, $R_7 = R_8 = R_{A,B}$, cette équation se récrit :

$$\ddot{x}(t) + \left(\frac{2}{R_{A,B}C_1} \right) \dot{x}(t) + \left(\frac{\alpha_e}{R_1^2} + \frac{1}{R_{A,B}^2} \right) \frac{x(t)}{C_1^2} + \frac{\beta_e x^3(t)}{R_1^2 C_1^2} = - \frac{2I_p^-}{R_{A,B}C_1^2}$$

L'équation obtenue fait apparaître un terme d'amortissement, proportionnel à $\dot{x}(t)$. Dans les cas C et D, on a un fort amortissement, alors que dans les cas E, F et G, on ne détecte pas d'amortissement. On en déduit que l'on doit avoir $R_B \gg R_A$.

Comme les courbes E, F et G ressemblent beaucoup aux courbes de l'oscillateur mécanique de la figure 3 pour lesquelles le préfacteur de $x(t)$ était négatif, il doit en être de même ici. On doit avoir :

$$\frac{\alpha_e}{R_1^2} + \frac{1}{R_B^2} < 0$$

Or, nous savons que (étant donné que $R_3 = R_4 = R_6$) :

$$\alpha_e = \frac{R_3 R_5 - R_4 R_6}{R_3(R_4 + R_5)} = \frac{R_5 - R_3}{R_3 + R_5}$$

Par conséquent :

$$R_B > R_1 \sqrt{\frac{R_3 + R_5}{R_3 - R_5}}$$

Numériquement, il faut donc que $R_B > R_1 \sqrt{3}$ soit $R_B > 1,7 \text{ k}\Omega$ (ce qui est probablement nettement sous-évalué).