

Corrigé Ulm PSI 2025

Energie bleue

Nicolas Choimet, PSI* Eiffel Bordeaux

nicolas.choimet@live.fr

1. Génération d'énergie électrique à partir d'énergie osmotique

Q1 Une mole de cristal NaCl contient autant d'ions Na^+ que d'ions Cl^- . Par conséquent, $x_{\text{Na}} = x_{\text{Cl}}$.

On peut écrire :

$$x_{\text{Na}} = x_{\text{Cl}} = \frac{n_{\text{Na}}}{n_{\text{Na}} + n_{\text{Cl}} + n_{\text{eau}}} = \frac{n_{\text{Cl}}}{n_{\text{Na}} + n_{\text{Cl}} + n_{\text{eau}}} = \frac{n_{\text{NaCl}}}{2n_{\text{NaCl}} + n_{\text{eau}}} \approx \frac{n_{\text{NaCl}}}{n_{\text{eau}}}$$

où n_{NaCl} désigne la quantité de cristal NaCl dissous dans un litre d'eau.

Or, $n_{\text{NaCl}} = m_{\text{NaCl}}/M_{\text{NaCl}} \approx 30/58,5 \approx 0,5 \text{ mol.L}^{-1}$ et $n_{\text{eau}} = V/v_m = 1000/18 \text{ mol.L}^{-1}$.
On en déduit :

$$x \approx \frac{2n_{\text{NaCl}}}{n_{\text{eau}}} \approx \frac{2 \times 0,5 \times 18}{1000} = 0,018 \approx 0,02$$

Q2 La fraction molaire de l'eau valant $1 - x$, on peut écrire :

$$\mu(P, T, x) = \mu^*(P, T) + RT \ln(1 - x)$$

Question hors-programme et bloquante pour les questions Q3 et Q4 au moins.

- Solution B : eau pure. Par conséquent :

$$G_B = \frac{V_B}{v_m} \mu^*(P, T)$$

- Solution A : eau salée. Par conséquent :

$$G_A = \frac{V_A}{v_m} [\mu^*(P, T) + RT \ln(1 - x)] + \frac{xV_A}{v_m} [\Psi(P, T) + RT \ln x]$$

soit :

$$G_A = \frac{V_A}{v_m} [\mu^*(P, T) + x\Psi(P, T) + RT(\ln(1 - x) + x \ln x)]$$

Q3 L'enthalpie libre étant extensive, on peut sommer les contributions du solvant et du soluté :

$$G_M = G_{\text{eau}} + G_S = \frac{V_M}{v_m} [\mu^*(P, T) + RT \ln(1 - x_M)] + \frac{x_M V_M}{v_m} [\Psi(P, T) + RT \ln x_M]$$

soit :

$$G_M = \frac{V_M}{v_m} [\mu^*(P, T) + x_M \Psi(P, T) + RT(\ln(1 - x_M) + x_M \ln x_M)]$$

Q4 La quantité de sel est évidemment la même avant et après mélange. Elle vaut : $n_S = xV_A/v_m$. Par conséquent :

$$x_M = \frac{n_S}{n_S + n_{\text{eau}}} = \frac{\frac{xV_A}{v_m}}{\frac{xV_A}{v_m} + \frac{V_A + V_B}{v_m}} = \frac{xV_A}{V_A + V_B + xV_A} = \frac{x\phi_A}{1 + x\phi_A}$$

La variation d'enthalpie libre due au mélange vaut $\Delta G = G_M - G_A - G_B$ et s'écrit :

$$\Delta G = \frac{\Psi(P, T)}{v_m} (x_M V_M - xV_A) + \frac{RT}{v_m} [V_M(\ln(1 - x_M) + x_M \ln x_M) - V_A(\ln(1 - x) + x \ln x)]$$

Or,

$$\begin{cases} x_M V_M - xV_A = -\frac{x^2 V_A^2}{V_A + V_B + xV_A} = -\frac{x^2 \phi_A^2}{1 + x\phi_A} (V_A + V_B) \\ 1 - x_M = \frac{V_A + V_B}{V_A + V_B + xV_A} = \frac{1}{1 + x\phi_A} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \Delta G = & -\frac{(V_A + V_B)\Psi(P, T)}{v_m} \frac{x^2 \phi_A^2}{1 + x\phi_A} \\ & + \frac{RT(V_A + V_B)}{v_m} \left[\frac{x\phi_A}{1 + x\phi_A} \ln \frac{x\phi_A}{1 + x\phi_A} - \ln(1 + x\phi_A) \right. \\ & \left. - \phi_A(\ln(1 - x) + x \ln x) \right] \end{aligned}$$

Q5 Comme $x \ll 1$, on peut négliger le premier terme quadratique. Donc :

$$\Delta G \approx \frac{RT(V_A + V_B)}{v_m} \left[\frac{x\phi_A}{1 + x\phi_A} \ln \frac{x\phi_A}{1 + x\phi_A} - \ln(1 + x\phi_A) - \phi_A(\ln(1 - x) + x \ln x) \right]$$

A l'ordre 1 en x , on obtient :

$$\Delta G \approx \frac{RT(V_A + V_B)x\phi_A \ln \phi_A}{v_m} = \left(\frac{RTV_A \ln \phi_A}{v_m} \right) x$$

Q6 Lors de la détente isotherme, le gaz subit une variation d'enthalpie libre donnée par :

$$\Delta G_{\text{gaz}} = \Delta H_{\text{gaz}} - T\Delta S_{\text{gaz}} = -T\Delta S_{\text{gaz}}$$

car le gaz parfait suit la deuxième loi de Joule.

L'identité thermodynamique pour $U(S, V)$ s'écrit $dU = T dS - PdV$, et pour un gaz parfait, $dU = C_V dT$ et $P = nRT/V$. Par conséquent :

$$dS = \frac{C_V dT}{T} + \frac{nR dV}{V}$$

La transformation étant isotherme, on en déduit : $\Delta S_{\text{gaz}} = nR \ln(V_M/V_A)$. Par conséquent :

$$\Delta G_{\text{gaz}} = -nRT \ln(V_M/V_A)$$

En posant $\phi_A = V_A/V_M$, on obtient :

$$\Delta G_{\text{gaz}} = nRT \ln \phi_A$$

Cette expression est identique à celle que nous avons trouvée en Q5 si l'on choisit pour le nombre de moles de gaz : $n = xV_A/v_m$. Or, cette quantité correspond au nombre de moles de soluté dans le mélange, assimilé à un mélange idéal.

Dans le cas du gaz parfait, les molécules se comportent comme si elles étaient seules ; seul le désordre augmente quand le volume augmente. Dans le cas du mélange idéal, il en est de même pour les molécules de soluté et le mélange ne fait qu'accroître le désordre.

Q7 Appliquons les deux principes de la thermodynamique au système global en évolution isotherme et isobare. Comme on est à pression constante, on utilise l'enthalpie :

$$\begin{cases} \Delta H = Q + W^\# \\ \Delta S \geq Q/T \end{cases}$$

où $W^\#$ désigne le travail « utile » (c'est-à-dire autre que le travail des forces de pression) échangé par le système avec l'extérieur. Etant donné que l'on veut récupérer du travail sur le système, $W^\# < 0$. On introduit donc $W_{\text{récup}}^\# = -W^\# > 0$

On en déduit :

$$W_{\text{récup}}^\# = Q - \Delta H \leq T\Delta S - \Delta H$$

soit :

$$W_{\text{récup}}^\# \leq -\Delta G$$

Numériquement :

$$W_{\text{récup}}^{\#, \max} = -\Delta G = -\frac{8 \times 300 \times 1 \times \ln 0,5}{18 \cdot 10^{-6}} \times 0,018 \approx 1,7 \text{ MJ} \approx 0,47 \text{ kWh}$$

Q8 Il suffit d'écrire :

$$\Delta t = \frac{W_{\text{récup}}^{\#, \max}}{\mathcal{P}} = \frac{470}{9} \approx 5 \text{ h}$$

Q9 Il suffit de remplacer le volume V_A par le débit de volume du fleuve dans l'expression trouvée en Q5 :

$$\mathcal{P}^{\max} = \left(\frac{RTD_V \ln \phi_A}{v_m} \right) x$$

On obtient :

$$\mathcal{P}^{\max} = \frac{8 \times 300 \times 2 \cdot 10^5 \times \ln 2}{18 \cdot 10^{-6}} \times 0,018 \approx 340 \text{ GW}$$

Cela équivaut à environ 380 réacteurs nucléaires !

Q10 Il faut maximiser $-V_A \ln \phi_A = V_A \ln(1 + V_B/V_A)$. En posant $X = V_A/V_B$, cela revient à maximiser la fonction $f(X) = X \ln(1 + 1/X)$. Pour $X \ll 1$, $f(X) \sim -X \ln X \xrightarrow{X \rightarrow 0} 0$. Pour $X \gg 1$, $f(X) \sim 1$. Sans faire d'étude plus approfondie, on peut raisonnablement penser qu'il faut choisir $X \gg 1$ c'est-à-dire $V_A \gg V_B$. C'est évidemment le cas pour l'embouchure d'un fleuve dans l'océan.

2. Récupération d'énergie à l'aide d'une membrane chargée électriquement et d'électrodes

2.1. Propriétés de l'eau salée dans un canal

Q11 Il suffit d'écrire la loi de Fick, la concentration c_+ étant exprimée en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$\vec{j}_+^{(D)} = -D_+ \overrightarrow{\text{grad}} c_+$$

Le coefficient de diffusion D_+ s'exprimant en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\vec{j}_+^{(D)}$ s'exprime bien en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

Q12 Le vecteur densité de courant de particules total (en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) doit s'écrire :

$$\vec{j}_+ = \vec{j}_+^{(E)} + \vec{j}_+^{(D)} = -(e\mu_+ c_+ \overrightarrow{\text{grad}} \phi + D_+ \overrightarrow{\text{grad}} c_+)$$

On écrit l'équation de locale de conservation de la matière :

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} + \text{div} \vec{j}_+ = 0$$

On obtient :

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} = \text{div}(e\mu_+ c_+ \overrightarrow{\text{grad}} \phi + D_+ \overrightarrow{\text{grad}} c_+)$$

On en déduit, en posant $\psi = e\phi/k_B T$:

$$\frac{\partial c_+}{\partial t} = \text{div}(k_B T \mu_+ c_+ \overrightarrow{\text{grad}} \psi + D_+ \overrightarrow{\text{grad}} c_+)$$

Q13 A l'équilibre thermodynamique, c_+ ne dépend pas du temps. On en déduit :

$$\text{div}(k_B T \mu_+ c_+ \overrightarrow{\text{grad}} \psi + D_+ \overrightarrow{\text{grad}} c_+) = 0$$

En tenant compte de la distribution de Boltzmann, on obtient :

$$\vec{j}_+ = -k_B T \mu_+ c_\infty \exp(-\psi) \overrightarrow{\text{grad}} \psi - D_+ c_\infty \overrightarrow{\text{grad}} [\exp(-\psi)] =$$

soit :

$$\vec{j}_+ = (D_+ - k_B T \mu_+) c_\infty \exp(-\psi) \overrightarrow{\text{grad}} \psi = \vec{0}$$

Pour avoir $\text{div} \vec{j}_+ = 0$, il suffit que :

$$D_+ = k_B T \mu_+$$

Cette équation est due à Einstein.

Q14 Le facteur de Boltzmann s'écrit

$$\exp\left(-\frac{\mathcal{E}}{k_B T}\right)$$

pour un système quelconque d'énergie $\mathcal{E}$ dont la température est fixée. Pour les cations Na^+ , $\mathcal{E}_+$ correspond à leur énergie potentielle d'interaction avec le champ extérieur : $\mathcal{E}_+ = e\phi$. Pour les anions Cl^- , l'énergie potentielle d'interaction avec le champ extérieur s'écrit : $\mathcal{E}_- = -e\phi$. Par conséquent, la concentration des anions est proportionnelle à :

$$\exp\left(\frac{e\phi}{k_B T}\right) = \exp \psi$$

En l'absence de champ extérieur appliqué c'est-à-dire infiniment loin de la paroi chargée, la solution doit être localement neutre. Par conséquent, on doit prendre la même constante c_∞ pour les cations et pour les anions.

On en conclut :

$$c_- = c_\infty \exp \psi$$

Q15 La densité volumique de charge (en $\text{C} \cdot \text{m}^{-3}$) s'écrit :

$$\rho_e = e\mathcal{N}_A(c_+ - c_-) = e\mathcal{N}_A c_\infty (\exp(-\psi) - \exp \psi) = -2e\mathcal{N}_A c_\infty \text{sh } \psi$$

Q16 Dans le vide, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\Delta\phi + \frac{\rho_e}{\epsilon_0} = 0$$

Dans le milieu ionique on a donc :

$$\Delta\phi + \frac{\rho_e}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \Delta\phi - \frac{2e\mathcal{N}_A c_\infty}{\epsilon_0 \epsilon_r} \text{sh } \psi = 0$$

On en déduit :

$$\Delta\psi - \frac{2e^2 \mathcal{N}_A c_\infty}{\epsilon_0 \epsilon_r k_B T} \text{sh } \psi = 0$$

c'est-à-dire :

$$\Delta\psi - \frac{\text{sh } \psi}{\lambda_D^2} = 0$$

Q17 Tous les plans $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ et $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. De plus, il y a invariance de la distribution de charges parallèlement aux vecteurs $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$. On en conclut que :

$$\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$$

Etant donné que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$, on en déduit que le potentiel ne dépend que de z : $\phi(z)$.

Q18 Dans l'hypothèse $\psi \ll 1$ (qu'il vaudrait mieux écrire $|\psi| \ll 1$), et étant donné que ψ est de la forme $\psi(z)$, il s'agit de résoudre :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\psi}{\lambda_D^2} = 0$$

On obtient :

$$\psi(z) = A \exp(-z/\lambda_D) + B \exp(z/\lambda_D)$$

Le potentiel doit rester fini à l'infini, donc $B = 0$. Par conséquent : $\psi(z) = A \exp(-z/\lambda_D)$.

Le potentiel valant ϕ_0 sur la paroi située en $z = 0$, on en déduit :

$$\phi(z) = \phi_0 \exp(-z/\lambda_D)$$

Q19 Le champ électrique dans le milieu ionique s'écrit donc :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi = \frac{\phi_0 \exp(-z/\lambda_D)}{\lambda_D} \vec{u}_z$$

On voit qu'à l'infini, ce champ s'annule.

Appliquons le théorème de Gauss à une surface cylindrique fermée de génératrices parallèles à $\vec{u}_z$, fermée par une section S située à l'infini dans le milieu ionique (où le champ est nul) et une section S située dans la membrane (où le champ est aussi nul, par hypothèse). Le flux sortant du champ électrique à travers cette surface est nul. On en déduit que la charge qu'elle contient est nulle :

$$Q^{\text{int}} = 0 = S \int_0^{+\infty} \rho_e(z) dz + S\Sigma$$

Par conséquent :

$$\int_0^{+\infty} \rho_e(z) dz + \Sigma = 0$$

Q20 Déterminons la densité de charge :

$$\rho_e(z) = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{d^2\phi}{dz^2} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \phi_0}{\lambda_D^2} \exp(-z/\lambda_D)$$

On en déduit, par l'équation (4) :

$$\phi_0 = \frac{\lambda_D \Sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

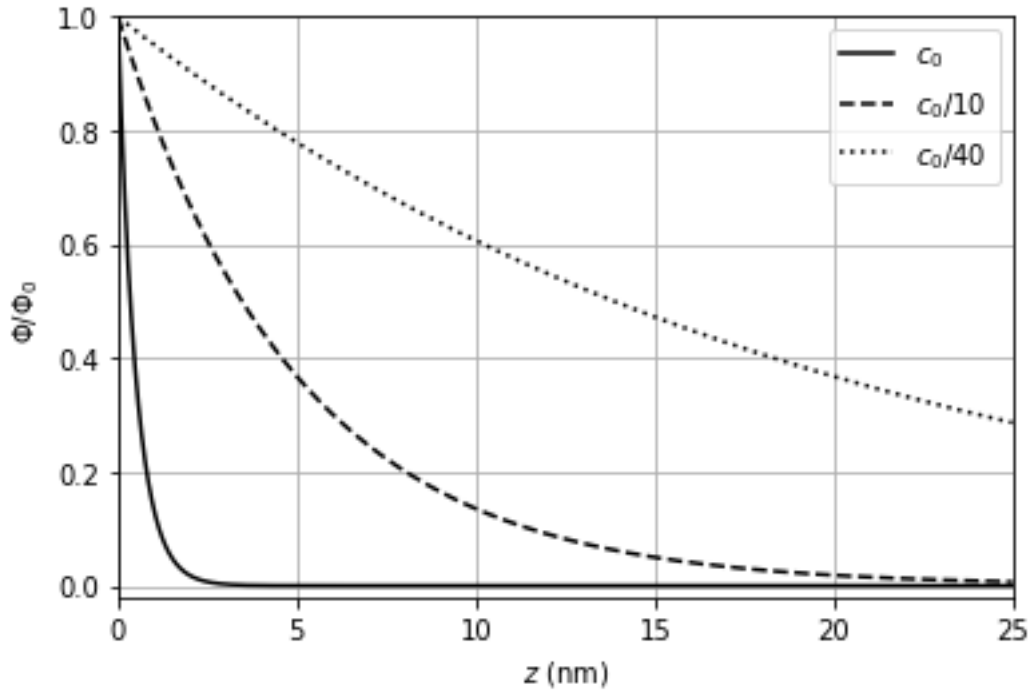
Q21 Une simple analyse dimensionnelle de l'équation aux dérivées partielles obtenue en Q16 montre que λ_D est une longueur. Numériquement, on trouve :

$$e^2 \lambda_D^2 = \frac{9 \cdot 10^{-12} \times 80 \times 1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}{2 \times 6 \cdot 10^{23} \times 0,5 \times 10^3} \approx 56 \cdot 10^{-58} \text{ USI}$$

On en déduit :

$$\lambda_D \approx 0,5 \text{ nm}$$

Q22 La distance λ_D d'atténuation du potentiel est une fonction décroissante de la concentration c_∞ :



Etant donné que $a/\lambda_D \approx 50$, il est effectivement raisonnable de considérer le milieu ionique comme infini sur une section transversale d'un canal.

Q23 Vérifions que la solution proposée par l'énoncé fonctionne. Commençons par remarquer que

$$\ln \text{th}[\psi(z)/4] = \ln \gamma - z/\lambda_D$$

Or,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} [\ln \text{th}[\psi(z)/4]] &= \frac{\psi'(z)}{4} \frac{\text{th}'[\psi(z)/4]}{\text{th}[\psi(z)/4]} = \frac{\psi'(z)}{4} \frac{1}{\text{ch}^2[\psi(z)/4]} \frac{\text{ch}[\psi(z)/4]}{\text{sh}[\psi(z)/4]} \\ &= \frac{\psi'(z)}{4 \text{sh}[\psi(z)/4] \text{ch}[\psi(z)/4]} = \frac{\psi'(z)}{2 \text{sh}[\psi(z)/2]} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{\psi'(z)}{2 \text{sh}[\psi(z)/2]} = -\frac{1}{\lambda_D}$$

Par conséquent :

$$\frac{d\psi}{dz} = -\frac{2 \text{sh}[\psi(z)/2]}{\lambda_D}$$

On en déduit :

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\frac{d\psi}{dz} \frac{\text{ch}[\psi(z)/2]}{\lambda_D} = -\left(-\frac{2 \text{sh}[\psi(z)/2]}{\lambda_D}\right) \frac{\text{ch}[\psi(z)/2]}{\lambda_D} = \frac{\text{sh} \psi(z)}{\lambda_D^2}$$

La solution proposée est bien solution de l'équation montrée en Q16.

2.2. Écoulement diffusio-osmotique

Q24 La force volumique électrostatique s'écrit :

$$\vec{f}_{\text{vol}} = \rho_e \vec{E} = -\rho_e \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Q25 Le nombre de Reynolds s'écrit :

$$\text{Re} = \frac{\rho L v}{\eta}$$

Comme l'écoulement dans un canal est un écoulement interne, il faut a priori écrire

$$\text{Re} = \frac{\rho a v}{\eta}$$

Enoncé faux ou trompeur...

Q26 Comme il s'agit d'un écoulement de Poiseuille plan (et non cylindrique), la vitesse débitante est plutôt donnée par :

$$v = \frac{a^2}{12\eta L} \delta \Pi$$

La pression osmotique vaut (en exprimant δc en mol.m^{-3}) $\delta \Pi = RT \delta c \approx 8 \times 300 \times 500 = 1,2 \text{ MPa} = 12 \text{ bar}$. On en déduit la vitesse débitante :

$$v = \frac{(25 \cdot 10^{-9})^2 \times 1,2 \cdot 10^6}{12 \times 10^{-3} \times 100 \cdot 10^{-9}} \approx 0,6 \text{ m.s}^{-1}$$

On en déduit :

$$\text{Re} \approx \frac{10^3 \times 25 \cdot 10^{-9} \times 0,6}{10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^{-2}$$

Puisque $\text{Re} \ll 2000$ (écoulement interne), on est en régime laminaire : la viscosité domine largement la convection.

NB : si on avait suivi l'énoncé à la lettre aux questions Q25 et Q26 (mais il me semble faux), on aurait trouvé $\text{Re} \approx 9 \cdot 10^{-2} \approx 0,1$ ce qui ne modifie pas la conclusion.

Q27 Avec un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} \vec{e}_x - \overrightarrow{\text{grad}} P - \rho_e \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \vec{0}$$

Q28 En projection selon $\vec{e}_z$, on obtient :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho_e \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Q29 En suivant l'énoncé, $\phi(x, z) = \phi_0(x) \exp[-z/\lambda_D(x)]$. D'autre part, l'équation de Poisson s'écrit :

$$\rho_e(x, z) = -\varepsilon_0 \varepsilon_r \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right) \approx -\varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

On en déduit :

$$\rho_e(x, z) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{\lambda_D^2(x)} \phi_0(x) \exp[-z/\lambda_D(x)] = -\left(\frac{2e^2 \mathcal{N}_A}{k_B T} \right) c_\infty(x) \phi(x, z)$$

soit :

$$\rho_e(x, z) = \underbrace{-2e \mathcal{N}_A c_\infty(x)}_K \psi(x, z)$$

Q30 On en déduit :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 2e \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \psi}{\partial z} = k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \frac{\partial(\psi^2)}{\partial z}$$

En intégrant (à x constant) entre $z = +\infty$ (où le potentiel adimensionné est nul) et z , on obtient :

$$P(x, z) = P_\infty(x) + k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi^2(x, z)$$

On peut parler de pression osmotique (**notion désormais hors-programme en PSI**) car la pression dépend de la concentration $c_\infty(x)$.

Q31 En projection selon $\vec{e}_x$, l'équation de Navier-Stokes donne :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\partial P}{\partial x} + \rho_e \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

Or,

$$\begin{cases} \rho_e \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2e \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \phi}{\partial x} = -2k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \frac{\partial P}{\partial x} = k_B T \mathcal{N}_A \frac{dc_\infty}{dx} \psi^2(x, z) + 2k_B T \mathcal{N}_A c_\infty(x) \psi(x, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = k_B T \mathcal{N}_A \psi^2(x, z) \frac{dc_\infty}{dx}$$

Q32 La condition d'adhésion du fluide aux parois impose l'annulation de la vitesse sur les parois.

Q33 Le potentiel adimensionné s'écrit $\psi(x, z) = \psi_0(x) \exp[-z/\lambda_D(x)]$ où $\psi_0(x) = e\phi_0(x)/k_B T$. On en déduit :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = k_B T \mathcal{N}_A \left(\frac{e\phi_0(x)}{k_B T} \right)^2 \frac{dc_\infty}{dx} \exp[-2z/\lambda_D(x)]$$

Or,

$$\frac{e^2 \mathcal{N}_A}{k_B T} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \lambda_D^2(x)}{2 c_\infty(x)}$$

Donc :

$$\eta \frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2 \lambda_D^2(x) c_\infty(x)} \frac{dc_\infty}{dx} \phi_0^2(x) \exp[-2 z / \lambda_D(x)]$$

soit :

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2 \eta \lambda_D^2(x)} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx} \phi_0^2(x) \exp[-2 z / \lambda_D(x)]$$

On en déduit, en intégrant deux fois par rapport à z :

$$v(z) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{8 \eta} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx} \phi_0^2(x) \exp[-2 z / \lambda_D(x)] + A(x)z + B(x)$$

La condition d'adhérence impose :

$$B(x) = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{8 \eta} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx} \phi_0^2(x)$$

Le gradient de vitesse s'écrit :

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{4 \eta \lambda_D(x)} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx} \phi_0^2(x) \exp[-2 z / \lambda_D(x)] + A(x)$$

L'annulation du gradient de vitesse à l'infini impose $A(x) = 0$. Par conséquent :

$$v(z) = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{8 \eta} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx} \phi_0^2(x) (\exp[-2 z / \lambda_D(x)] - 1)$$

On en déduit, quand $z \rightarrow +\infty$:

$$v_\infty = -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r \phi_0^2(x)}{8 \eta} \frac{d(\ln c_\infty)}{dx}$$

Q34 Etant donné que $dc_\infty/dx < 0$, $d(\ln c_\infty)/dx < 0$. On en déduit que $v_\infty > 0$: l'écoulement a lieu du milieu le plus concentré vers le milieu le moins concentré.

2.3. Courant ionique diffusio-osmotique

Q35 Il est évident que I_{DO} est un courant électrique, en A.

Le vecteur densité de courant électrique s'écrit $\vec{j} = \rho_e(x, z) v(z) \vec{e}_x$ où $v(z)$ est le profil des vitesses déterminé en Q33 pour la paroi située en $z = 0$. Pour cette paroi, la contribution au courant s'écrit :

$$a \int_0^{+\infty} \rho_e(x, z) v(z) dz$$

L'étude faite dans la Partie 2.2. pour la paroi située en $z = 0$ aurait pu être menée de manière identique pour les trois autres parois supposées indépendantes entre elles car $\lambda_D(x) \ll a$. On a donc au total :

$$I_{DO} = 4a \int_0^{+\infty} \rho_e(x, z) v(z) dz$$

Q36 Pour ℓ_B , on peut penser à l'expression de l'énergie potentielle d'interaction d'une charge q plongée dans le potentiel ϕ créé par une autre charge Q :

$$\mathcal{E}_p = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r r}$$

Etant donné que $k_B T$ est une énergie, on en déduit que ℓ_B est une longueur.

Comme d'autre part Σ est une charge surfacique, il est évident que ℓ_{GC} est aussi une longueur.

Q37 Numériquement, on trouve :

$$\ell_B \approx \frac{1,6 \times 1,6 \times 10^{-38}}{4\pi \times 9 \cdot 10^{-12} \times 80 \times 1,4 \cdot 10^{-23} \times 300} = \frac{4 \times 2 \times 10^{-8}}{\pi \times 9 \times 1,4 \times 3} \approx 0,6 \text{ nm}$$

Pour deux ions distants de r , on voit que le rapport ℓ_B/r est égal au rapport $\mathcal{E}_p/k_B T$ de leur énergie potentielle d'interaction électrostatique et de l'énergie d'agitation thermique. Si $r \ll \ell_B$, $\mathcal{E}_p \gg k_B T$: l'agitation thermique est négligeable. Si au contraire $r \gg \ell_B$, $\mathcal{E}_p \ll k_B T$: l'agitation thermique domine.

Q38 Lorsque Σ est « très faible » (sans autre précision), $\ell_{GC} \gg \lambda_D$ d'après l'énoncé. On en déduit, d'après le formulaire, que :

$$\frac{\ell_{GC}}{\lambda_D} \text{sh}^{-1} \left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \right) \approx 1 - \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \right)^2$$

Par conséquent :

$$K_{osm} \approx a\Sigma \frac{k_B T}{3\pi\eta\ell_B} \left(\frac{\lambda_D}{\ell_{GC}} \right)^2$$

Q39 Lorsque Σ est « très grande », $\ell_{GC} \ll \lambda_D$ d'après l'énoncé. Il s'agit donc de trouver le comportement de $\text{sh}^{-1} x$ quand $x \gg 1$. Pour cela cherchons une expression explicite de $\text{sh}^{-1} x$. Posons $y = \text{sh}^{-1} x$. Par définition de la fonction réciproque,

$$\text{sh}(\text{sh}^{-1} x) = \text{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

On en déduit :

$$e^{2y} - 2xe^y = 1$$

Or, $e^{2y} - 2xe^y = (e^y - x)^2 - x^2$. Par conséquent : $(e^y - x)^2 = 1 + x^2$. On en déduit (étant donné que $e^y > 0$) :

$$e^y = x + \sqrt{1+x^2}$$

Par conséquent :

$$y = \text{sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

Une indication aurait été la bienvenue...

On en déduit un équivalent en l'infini : $\text{sh}^{-1} x \sim \ln(2x) \sim \ln x$. Par conséquent, $\text{sh}^{-1} x/x \sim \ln x/x \rightarrow 0$. On en déduit :

$$K_{\text{osm}} \approx 2a\Sigma \frac{k_B T}{\pi\eta\ell_B}$$

Q40 On en déduit :

$$I_{\text{DO}} = 2a\Sigma \frac{k_B T}{\pi\eta\ell_B} \frac{2c_s - 0}{L} = \frac{4a\Sigma}{L} \frac{k_B T}{\pi\eta\ell_B}$$

Ce résultat est indépendant de c_s . Numériquement, cela donne :

$$I_{\text{DO}} \approx \frac{4 \times 25 \cdot 10^{-9} \times 1}{100 \cdot 10^{-9}} \times \frac{1,4 \cdot 10^{-23} \times 300}{\pi \times 10^{-3} \times 6 \cdot 10^{-10}} \approx \frac{42 \times 10^{-22}}{19 \times 10^{-13}} \approx 2 \text{ nA}$$

Q41 L'expression « courant surfacique » porte à confusion. Il aurait mieux valu parler de densité de courant...

Si les canaux sont très serrés, il y en a $N = S/a^2$ pour une membrane de surface S . Le courant total parcourant la membrane vaut donc : $I = I_{\text{DO}} S/a^2$. Le courant traversant l'unité de surface de membrane (c'est-à-dire la densité de courant) vaut donc :

$$j = I_{\text{DO}}/a^2$$

Etant donné que $I_{\text{DO}} \propto a$, la densité de courant est proportionnelle à $1/a$: il vaut mieux empiler des canaux étroits.

3. Intégration du dispositif

3.1. Caractérisation de la résistance interne d'un canal

Q42 La conductance est la pente de la droite $I(U)$. On mesure grossièrement :

$$\begin{cases} G_1 = \frac{12 \cdot 10^{-9}}{0,18} \approx 7 \cdot 10^{-8} \Omega^{-1} \\ G_1 = \frac{2 \cdot 10^{-9}}{0,2} = 2 \cdot 10^{-8} \Omega^{-1} \end{cases}$$

On voit que $G_1/G_2 \approx 3,5$ alors que $c_{s,1}/c_{s,2} = 10$. La conductance n'est donc pas proportionnelle à la concentration.

Q43 Le vecteur densité de courant (en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) associé à la migration des cations s'écrit :

$$\vec{j}_+ = e\mathcal{N}_A \vec{j}_+^{(E)} = e^2 \mathcal{N}_A \mu_+ c_s \vec{E} = -e^2 \mathcal{N}_A \mu_+ c_s \overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

On en déduit :

$$I_+ = \frac{e^2 \mathcal{N}_A \mu_+ c_s a^2}{L} \Delta V$$

Q44 Les anions sont attirés par le champ, au contraire des cations. Par conséquent, $\vec{j}_-^{(E)}$ est de sens opposé au champ électrique. En introduisant $\mu_- > 0$, on a donc :

$$\vec{j}_-^{(E)} = -e\mu_- c_s \vec{E}$$

Le vecteur densité de courant en $\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$) associé à la migration des anions s'écrit :

$$\vec{j}_- = -e\mathcal{N}_A \vec{j}_-^{(E)} = e^2 \mathcal{N}_A \mu_- c_s \vec{E} = -e^2 \mathcal{N}_A \mu_- c_s \overrightarrow{\text{grad } \phi}$$

On en déduit :

$$I_- = \frac{e^2 \mathcal{N}_A \mu_- c_s a^2}{L} \Delta V$$

Le courant total s'écrit donc :

$$I = \frac{e^2 \mathcal{N}_A (\mu_+ + \mu_-) c_s a^2}{L} \Delta V$$

La résistance R_c du canal vaut donc :

$$R_c = \frac{\Delta V}{I} = \frac{L}{e^2 \mathcal{N}_A (\mu_+ + \mu_-) c_s a^2}$$

Q45 La conductance du canal vaut :

$$G = \frac{e^2 \mathcal{N}_A (\mu_+ + \mu_-) c_s a^2}{L}$$

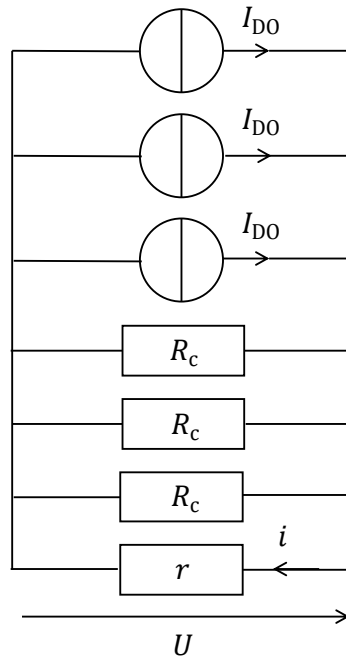
Numériquement, on trouve pour $c_s = 1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} = 1 \cdot 10^3 \text{ mol} \cdot \text{m}^{-3}$:

$$G = \frac{2,6 \cdot 10^{-38} \times 6 \cdot 10^{23} \times 10^{12} \times 10^3 \times 900 \cdot 10^{-18}}{10^{-6}} \approx 1,4 \cdot 10^{-10} \Omega^{-1}$$

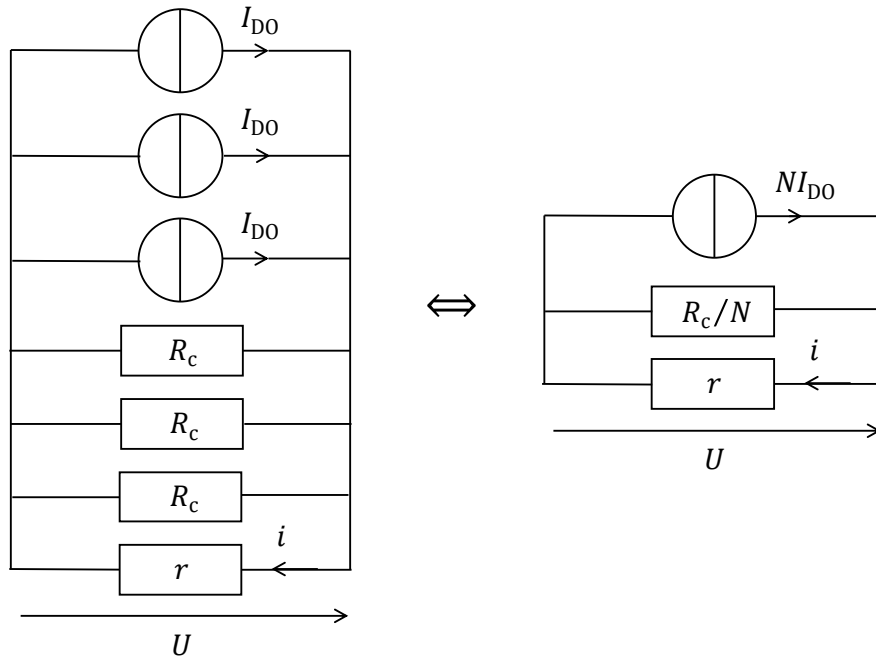
Cette valeur est beaucoup plus faible que la valeur mesurée en Q42. Cette discordance n'est pas surprenante : le calcul que nous venons de faire donne une relation de proportionnalité entre G et c_s alors que nous avons vu qu'il n'en était rien expérimentalement.

3.2. Circuit électrique équivalent

Q46 Voici le schéma électrique équivalent du système pour $N = 3$:



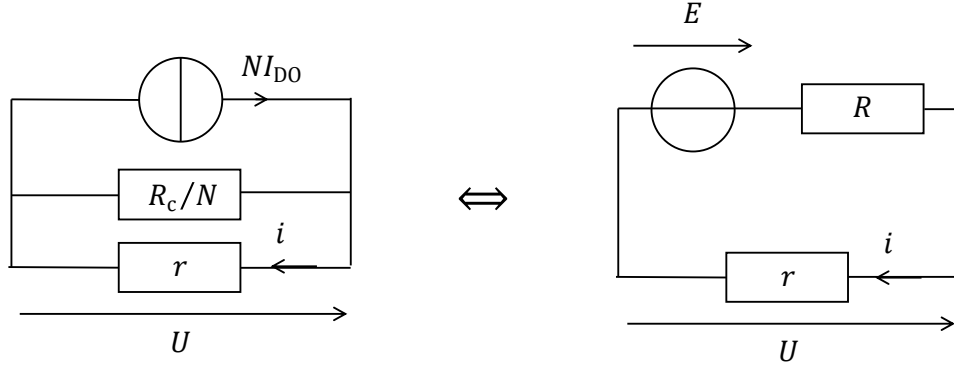
Q47 Le dispositif est équivalent à une source de courant idéale de courant électromoteur NI_{D0} alimentant les deux résistances R_c/N et r associées en parallèle.



On a donc un diviseur de courant. Par conséquent,

$$i = \left(\frac{1/r}{1/r + N/R_c} \right) NI_{D0} = \left(\frac{R_c}{R_c + Nr} \right) NI_{D0}$$

Représentons le courant électromoteur NI_{DO} en parallèle avec la résistance R_c/N par un générateur de Thévenin :



La tension aux bornes de la membrane s'écrit, en convention générateur :

$$U = \frac{R_c}{N} (NI_{\text{DO}} - i) = R_c I_{\text{DO}} - \left(\frac{R_c}{N}\right) i = E - Ri$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} E = R_c I_{\text{DO}} \\ R = R_c/N \end{cases}$$

Q48 La tension aux bornes de l'ampoule est donnée par (on a maintenant un diviseur de tension) :

$$U = \frac{rE}{r + R}$$

La puissance reçue par la lampe s'écrit donc :

$$\mathcal{P} = \frac{U^2}{r} = \frac{rE^2}{(r + R)^2}$$

Cette puissance tend vers zéro quand $r \ll R$ et quand $r \gg R$ et passe par un maximum pour $r = R$ (calcul classique), auquel cas :

$$\mathcal{P}_{\text{max}} = \frac{E^2}{4R}$$

Q49 Pour une surface S de membrane, $N = S/a^2$. Par conséquent, la puissance maximale est donnée par :

$$\mathcal{P}_{\max} = N \left(\frac{R_c I_{D0}^2}{4} \right) = \frac{S}{a^2} \left(\frac{R_c I_{D0}^2}{4} \right)$$

Par unité de surface, on a donc :

$$p_{\max} = \frac{R_c I_{D0}^2}{4a^2} = \frac{I_{D0}^2}{4Ga^2}$$

Numériquement, on trouve :

$$p_{\max} = \frac{10^{-18}}{4 \times 2 \cdot 10^{-8} \times 625 \times 10^{-18}} = \frac{10^8}{5000} = 20 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$$

Q50 Pour alimenter une ampoule de 9 W, il faut donc une surface de 4,5 cm².

Q51 Pour atteindre 900 MW, la surface nécessaire est de 45000 m², soit 4,5 hectares.

3.3. Onduleur

Q52 Au cours de chacune des deux phases, la tension U est donnée par :

$$U = \begin{cases} E - Ri & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \\ -E - Ri & \text{pour } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Q53 Les deux équations différentielles s'écrivent :

$$\begin{cases} L \frac{di}{dt} + (R + r) i(t) = E & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \\ L \frac{di}{dt} + (R + r) i(t) = -E & \text{pour } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

Q54 En introduisant les grandeurs $\tau = L/(R + r)$ et $I = E/(R + r)$, on obtient :

$$\begin{cases} \tau \frac{di}{dt} + i(t) = I & \text{pour } 0 \leq t \leq T/2 \\ \tau \frac{di}{dt} + i(t) = -I & \text{pour } T/2 \leq t \leq T \end{cases}$$

- Phase 1 : $0 \leq t \leq T/2$

$$i(t) = A \exp(-t/\tau) + I$$

A $t = 0$, $i(0) = i_0 = A + I$. Donc :

$$i(t) = (i_0 - I) \exp(-t/\tau) + I$$

- Phase 2 : $T/2 \leq t \leq T$

$$i(t) = B \exp[-(t - T/2)/\tau] - I$$

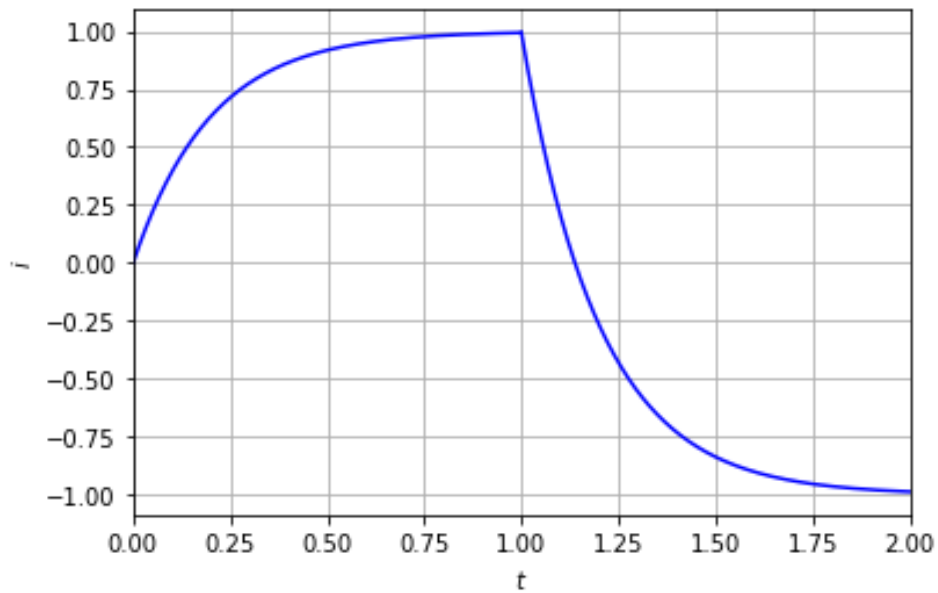
A $t = T/2$, $i(T/2) = B - I = (i_0 - I) \exp(-T/2\tau) + I$. Donc :

$$B = 2I + (i_0 - I) \exp(-T/2\tau)$$

Par conséquent :

$$i(t) = [2I + (i_0 - I) \exp(-T/2\tau)] \exp[-(t - T/2)/\tau] - I$$

Voici l'allure du courant pour $i_0 = 0$ et $T/\tau = 10$, sur une période:



Q55 En régime permanent, $i_0 = -i_{\max}$ et $i(T/2) = i_{\max}$. Par conséquent :

$$2I - (i_{\max} + I) \exp(-T/2\tau) - I = i_{\max}$$

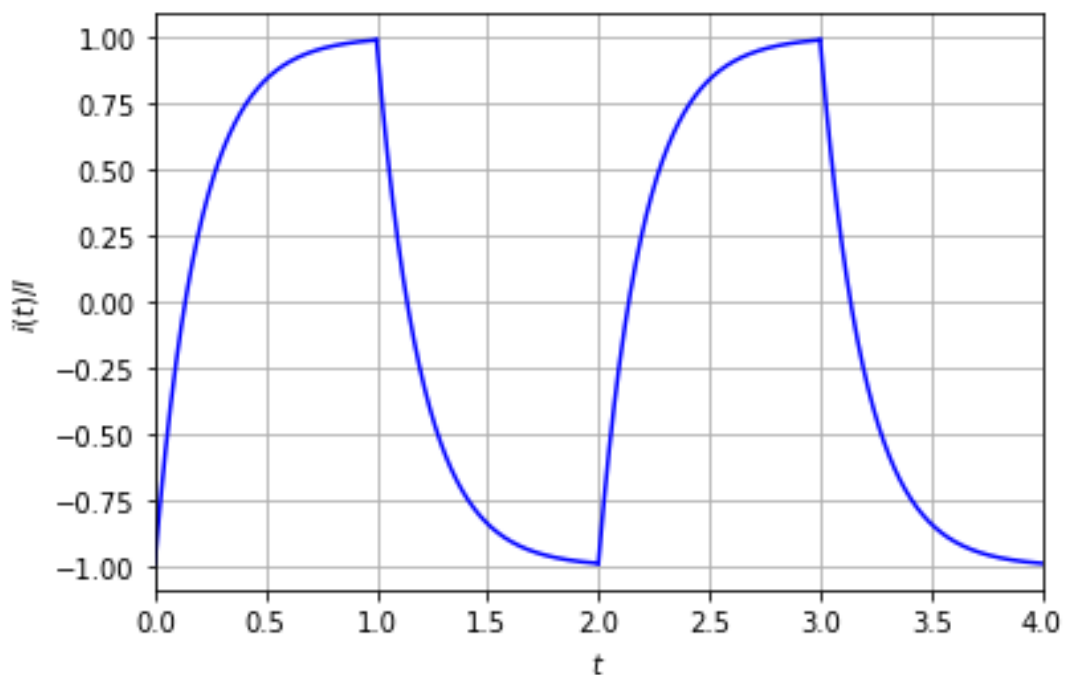
Donc :

$$i_{\max} = I \left(\frac{1 - \exp(-T/2\tau)}{1 + \exp(-T/2\tau)} \right) = I \operatorname{th}(T/4\tau)$$

Q56 En régime permanent, le courant au cours de la première phase s'écrit :

$$i(t) = I - I[1 + \operatorname{th}(T/4\tau)] \exp(-t/\tau) = I - I \left[\frac{\exp(T/4\tau)}{\operatorname{ch}(T/4\tau)} \right] \exp(-t/\tau)$$

Voici l'allure de $i(t)/I$ pour $T/\tau = 10$ en régime permanent sur deux périodes :



Q57 En régime **permanent (et non pas stationnaire)**, la puissance moyenne délivrée au cours d'une période est égale à la puissance moyenne délivrée au cours de la première phase d'une période. Par conséquent :

$$\mathcal{P}_{AC} = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} r i^2(t) dt = \frac{2r}{T} \int_0^{T/2} i^2(t) dt$$

Or,

$$i^2(t) = I^2 - 2I^2 \left[\frac{\exp(T/4\tau)}{\text{ch}(T/4\tau)} \right] \exp(-t/\tau) + I^2 \left[\frac{\exp(T/2\tau)}{\text{ch}^2(T/4\tau)} \right] \exp(-2t/\tau)$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{T/2} i^2(t) dt &= \frac{I^2 T}{2} - 2I^2 \tau \left[\frac{\exp(T/4\tau)}{\text{ch}(T/4\tau)} \right] [1 - \exp(-T/2\tau)] \\ &\quad + \frac{I^2 \tau}{2} \left[\frac{\exp(T/2\tau)}{\text{ch}^2(T/4\tau)} \right] [1 - \exp(-T/\tau)] \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{cases} \frac{I^2 \tau}{2} \left[\frac{\exp(T/2\tau)}{\text{ch}^2(T/4\tau)} \right] [1 - \exp(-T/\tau)] = I^2 \tau \left[\frac{\text{sh}(T/2\tau)}{\text{ch}^2(T/4\tau)} \right] = 2I^2 \tau \text{th}(T/4\tau) \\ 2I^2 \tau \left[\frac{\exp(T/4\tau)}{\text{ch}(T/4\tau)} \right] [1 - \exp(-T/2\tau)] = 4I^2 \tau \left[\frac{\text{sh}(T/4\tau)}{\text{ch}(T/4\tau)} \right] = 4I^2 \tau \text{th}(T/4\tau) \end{cases}$$

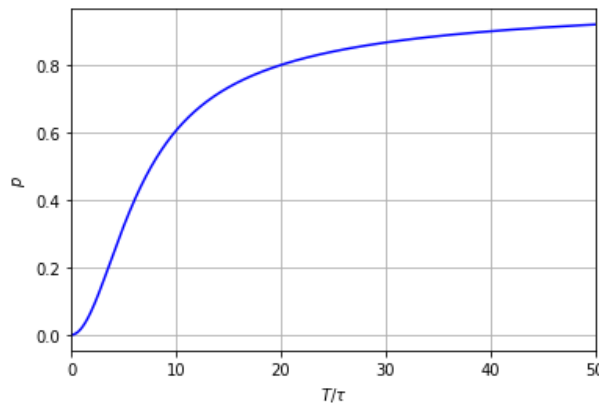
Par conséquent :

$$\int_0^{T/2} i^2(t) dt = \frac{I^2 T}{2} - 2I^2 \tau \text{th}(T/4\tau)$$

On en déduit :

$$\mathcal{P}_{AC} = rI^2 \left[1 - \frac{4\tau}{T} \text{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right) \right]$$

Voici l'allure (non demandée) des variations de $\mathcal{P}_{AC}/rI^2$ en fonction de T/τ :



Q58 Examinons les deux cas de figure :

- $T \gg \tau$:

Dans ce cas, $\text{th}(T/4\tau) \approx 1$ et $4\tau/T \ll 1$. On en déduit :

$$\mathcal{P}_{\text{AC}} = rI^2$$

- $T \ll \tau$:

Dans ce cas,

$$\text{th}\left(\frac{T}{4\tau}\right) \approx \frac{T}{4\tau} \left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4\tau}\right)^2\right]$$

Par conséquent :

$$\mathcal{P}_{\text{AC}} = rI^2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{T}{4\tau}\right)^2 \ll rI^2$$

Q59 Si l'on branchait directement la résistance r à la source, la puissance vaudrait :

$$\mathcal{P}_{\text{DC}} = \frac{U^2}{r} = \frac{rE^2}{(r+R)^2} = rI^2$$

On voit donc qu'il faut bien sûr choisir $T \gg \tau$ pour optimiser le transfert de puissance, et que dans ce cas, $\mathcal{P}_{\text{AC}} = \mathcal{P}_{\text{DC}} = rI^2$. La condition $T \gg \tau$ s'écrit :

$$\frac{L}{r+R} \ll T$$

Q60 La résistance de l'ampoule assimilée à une résistance pure est donnée par :

$$r = \frac{U_{\text{eff}}^2}{\mathcal{P}} = \frac{230^2}{9} \approx \frac{53 \cdot 10^3}{9} \approx 6 \text{ k}\Omega$$

La résistance R vaut :

$$R = \frac{1}{G_2} \approx \frac{1}{2 \cdot 10^{-8}} = 50 \text{ M}\Omega$$

On en déduit que $r + R \approx R$.

La condition $T \approx 10\tau$ se traduit par :

$$L = \frac{RT}{10} = \frac{R}{10f} = \frac{50 \cdot 10^6}{10 \times 50} = 10^5 \text{ H}$$

Cette valeur est gigantesque et irréalisable.

Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit réaliser la condition $L \ll RT$, c'est-à-dire $L \ll 10^6 \text{ H}$, qui est très facilement réalisable.