

PSI2. devoir en temps libre n°6. Proposition de correction.

B. Extrait centrale pc 2023.

A.1) Étude de la phase de démarrage

Q1. Le nombre de Reynolds $Re = \frac{\rho v L}{\eta}$ caractérise la nature de l'écoulement (laminaire ou turbulent).
Avec L une distance caractéristique des variations de v.

Prenons L = 0,5 m (largeur d'épaule) : $Re = \frac{1,225 \cdot \frac{40}{3,6} \cdot 1,8}{1,8 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^5$.

On est dans l'intervalle proposé, on pourra donc supposer le modèle adapté.

Q2. Bilan des actions sur le système cycliste + vélo : $\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_r, \vec{F}_N$

On applique le théorème du centre de masse au système cycliste + vélo :

Projection sur Ox :

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \mu_r N - \frac{1}{2} \rho S C_x v^2$$

Projection sur Oy

$$0 = mg \cos \alpha - N$$

D'où

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\rho S C_x}{2m} v^2 = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)$$

$$a = \frac{\rho S C_x}{2m} = \frac{1,225 \cdot 0,30}{2 \cdot 80} = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^{-1} ; b = g(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha) = 9,8(\sin 0,1 - 6,4 \cdot 10^{-3} \cdot \cos 0,1) = 0,92 \text{ m.s}^{-2}$$

Q3. En régime permanent $\frac{dv}{dt} = 0$

d'où

$$v_{\text{lim}}^2 = b/a = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho S C_x}$$
$$K = \frac{2mg(\sin \alpha - \mu_r \cos \alpha)}{\rho}$$

Q4. $v_{\text{lim}} = \sqrt{b/a} = \sqrt{0,92/2,3 \cdot 10^{-3}} = 20 \text{ m.s}^{-1} = 72 \text{ km.h}^{-1}$ plutôt rapide mais plausible.

Q5. Lignes 1 et 2 : importation des bibliothèques.

Ligne 3 à 7 : définit une fonction r ayant comme arguments f, v et t.

L'argument t est la liste des instants successifs, v est la vitesse initiale, et f l'accélération.

Cette fonction renvoie la liste des vitesses V aux instants successifs de la liste t à partir de la méthode d'Euler appliquée à l'équation différentielle (I.1) discrétisée.

Lignes 8 et 9 : Renvoie $F/m = 0,92 - 2,2 \cdot 10^{-3} v^2$ fonction trouvée en Q2

Ligne 10 définit une liste des temps

Ligne 11 : calcule la liste des vitesses avec les données de l'exercice.

Lignes 12 et 13 : tracé du graphe v(t)

Q6. Le vecteur x est un array numpy qui contient 1000 valeurs du temps également réparties entre 0 et 120 (secondes)

Courbe 1 : échantillonnage correct, correspond à la courbe cherchée, $v_{\text{lim}} = 20 \text{ m.s}^{-1}$. Entre deux points l'approximation linéaire fonctionne et ne se voit pas sur le résultat final.

Courbe 2 : échantillonnage 100 fois plus faible que le précédent. Entre deux points successifs, l'approximation linéaire ne marche plus. Il n'y a pas assez points pour rendre compte du régime transitoire. Par contre, on voit le régime permanent.

Courbe 3 : échantillonnage correct, mais un intervalle de temps 10 fois plus faible que celui de la courbe 1, on voit juste le début du régime transitoire, la vitesse limite n'est pas atteinte et on ne voit pas le régime permanent s'installer.

Courbe 4 : échantillonnage trop faible, courbe à 10 segments, intervalle de temps plus important, sur le 1^{er} segment la vitesse finale est supérieure à la vitesse limite, donc sur le 2^e segment l'accélération est négative, d'où la courbe en dents de scie. La méthode d'Euler ne converge pas.

Q7. $L_{RP} = \int_0^{t_f} v(t)dt$ où t_f est environ égal à 40 s si on se place à 95% de v_{lim} , soit $v = 19 \text{ m.s}^{-1}$.

En assimilant l'accélération en régime transitoire à une constante d'après la courbe 3

$$V = a*t ; L_{RP} = a*t_f^2 / 2 = (10/12)*40^2/2 = 670 \text{ m}$$

Cette valeur surestime L_{RP} , c'est un majorant.

Q8. def LRP(v,t):

L=0

i=0

while v[i]<.95*v[-1]: #v[-1] est la vitesse limite.

L+=v[i+1]*(t[i+1]-t[i])

i+=1

return L

Remarque : ce script suppose que la vitesse limite est atteinte ! Avec les valeurs du texte, il calcule :

$L_{RP} = 506 \text{ m}$ pour 95 % de V_{limite} .

I.A.2) Étude du régime permanent dans la descente de Laffrey

Q9. Sur le tableur de la calculatrice pour chaque valeur de T_c pour le casque classique il faut calculer $v_c = L' / T_c$; résultats affichés $\langle v_c \rangle = 18,526 \text{ m.s}^{-1}$ et l'écart-type affiché est $\sigma_v = 0,1143 \text{ m.s}^{-1}$ d'où :

$$u(\langle v_c \rangle) = \sigma_v / \sqrt{10} = 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{soit } \langle v_c \rangle = 18,526 \pm 0,036 \text{ m.s}^{-1}$$

Q10. Les histogrammes donnés peuvent être approximés à une gaussienne de valeur centrale 18,5 pour le casque classique et de demi-largeur à mi-hauteur $(18,7-18,4)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$, proche de l'incertitude type calculée précédemment sur une mesure.

Pour le casque profilé la valeur centrale est 19,3 et a largeur à mi-hauteur $(19,4-19,1)/2 = 0,15 \text{ m.s}^{-1}$, ce qui correspond à une valeur de l'incertitude-type $u(\langle v \rangle) = 0,15/10^{0,5} = 0,047 \text{ m.s}^{-1}$, proche de la valeur donnée dans l'énoncé.

Conclusion : La démarche expérimentale est pertinente, que l'incertitude type soit évaluée comme de type A ou de type B, car l'écart entre les deux valeurs moyennes $19,25-18,53=0,72 \text{ m.s}^{-1}$ est plus de 15 fois plus élevé que la plus grande des incertitudes type sur la moyenne, ce qui valide la démarche expérimentale.

Q11. $AN K = b*2m/\rho = 0,916*2*80/1,225 = 119,6 \text{ m}^4.\text{s}^{-2}$.

```
import numpy.random as rd
```

```
import numpy as np
```

```
def MonteCarlo2(
```

```
    vitesseMoyenne:float, # vitesse moyenne du cycliste (m/s)
```

```
    incertitudeType:float, # incertitude type sur la vitesse (m/s)
```

```
    N:int, # nombre d'échantillons à produire
```

```
    K:float, #constante dans vlim
```

```
) -> [float]: # tableau de N valeurs de Scx simulées
```

```
    generateur = rd.default_rng()
```

```
    V = generateur.normal(vitesseMoyenne, incertitudeType, N)#on génère les valeurs de v
```

```
SCx = K/V**2
return (np.mean(SCx),np.std(SCx))
```

```
print(MonteCarlo2( 18.52 , 0.041 , 10000 , 119.6))
print(MonteCarlo2(19.25, 0.036, 10000, 119.6))
```

Q12 : Puissance du poids $P_p = m\vec{g} \cdot \vec{v} = mgv\sin\alpha;$
 Puissance de $\vec{N}$ $P_N = 0$ (perpendiculaire au mouvement)
 Puissance de $\vec{F}_r$ $P_r = -\mu_r mg \cos\alpha \cdot v$
 Puissance de $\vec{F}_T$ $P_T = \frac{1}{2} \rho SC_x v^3$

Q13. On définit la variation de puissance entre les deux cas, qu'on assimile à G :

$$G = \Delta P = \frac{1}{2} \rho v^3 [SC_{xc} - SC_{xp}] \approx 24 \text{ W}$$

$$u(\Delta(SC_x)) = \sqrt{u(SC_{xc})^2 + u(SC_{xp})^2} \approx 0,005 \text{ SI}$$

Puis :

$$u(\Delta P) = \frac{1}{2} \rho v^3 u(\Delta(SC_x)) \approx 11 \text{ W}$$

Ce qui fait un peu beaucoup.