

Exercice 1 (ENSAM PSI 2011)

Étudier f canoniquement associé à $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation autour de $u = (1, 2, 2)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 3 (ENTPE-EIVP PSI 2013)

Trouver a, b, c, d tels que $A = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & 3 & a \\ -2 & 6 & b \\ 3 & c & d \end{pmatrix}$ soit une matrice de rotation (*); préciser ses éléments géométriques.

Exercice 4 (Centrale PSI 2013)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible, telle que $M^2 = M^T$

1. Montrer que M est orthogonale et que $\ker(M - I_n)^\perp$ est stable par M .
2. Déterminer les matrices M pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2024)

Soit E un espace euclidien.

1. Soit f une isométrie de E telle que $f \circ f = -id$. Montrer que pour tout $u \in E$, u et $f(u)$ sont orthogonaux.
2. Déterminer les isométries de $\mathbb{R}^2$ telles que $f \circ f = -id$.
3. Montrer qu'il n'existe pas d'isométrie de $\mathbb{R}^3$ telle que $f \circ f = -id$. (*)
4. Soit f une isométrie telle que $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$. Montrer que $f \circ f = -id$. (*)

Exercice 6 (CCINP PSI 2024)

Soient $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $M = \frac{1}{3}(A + 2B)$ soit orthogonale. On pose $C = A^T B$

1. Calculer $A^T B + B^T A$
2. En déduire un polynôme annulateur de C
3. Montrer que $\ker(C - I_n)$ et $\text{Im}(C - I_n)$ sont supplémentaires. (*)
4. Montrer $A = B$

Exercice 7 (CCINP PSI 2024)

Soit $A \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

1. Soient λ une valeur propre complexe de A et $X \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A associé à λ . Calculer de 2 façons différentes $(\overline{AX})^T AX$ et en déduire $|\lambda| = 1$
2. Soient B une autre matrice de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $|\det(A + B)| \leq 2^n$. (*)

Exercice 8 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ non nul. Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M) = (MX|X)$.

1. Déterminer $\phi(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$
2. Déterminer $\phi(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$. (*)

Indications

Exercice 3

Trouver c en utilisant une propriété des colonnes des matrices orthogonale; la troisième colonne est imposée par les deux première pour une rotation.

Exercice 5

3. *Utiliser le déterminant.*
4. *Vérifier que si $\forall u \in E, (f(u)|u) = 0$ alors $\forall (x, y) \in E^2, (f(x)|y) = -(x|f(y))$*

Exercice 6

3. *Montrer qu'ils sont orthogonaux.*

Exercice 7

2. *Faire apparaître $A^{-1}B$ et son polynôme caractéristique.*

Exercice 8

2. *Calculer $\phi(M)$ avec $M = \begin{pmatrix} R(\theta) & 0 \\ 0 & I_{n-2} \end{pmatrix}$.*