

Étude de certaines matrices symplectiques

Vocabulaire et notations

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et J_n la matrice carrée de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par blocs par :

$$J_n = \begin{pmatrix} 0_{n,n} & I_n \\ -I_n & 0_{n,n} \end{pmatrix}$$

où $0_{n,n}$ est la matrice nulle à n lignes et n colonnes et I_n est la matrice identité de même taille.

On dit qu'une matrice M de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ est *symplectique* si et seulement si $M^T J_n M = J_n$. On désigne par $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symplectiques de taille $2n \times 2n$.

On note $\mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R})$ le groupe orthogonal de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle *forme bilinéaire* sur E toute application ψ définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in E$,

$$X \mapsto \psi(X, Y) \quad \text{et} \quad X \mapsto \psi(Y, X)$$

soient toutes les deux linéaires sur E .

Soit ψ une forme bilinéaire ; ψ est dite *alternée* si et seulement si, pour tout $X \in E$, $\psi(X, X) = 0$; ψ est dite *antisymétrique* si et seulement si, pour tout $(X, Y) \in E^2$, $\psi(X, Y) = -\psi(Y, X)$.

Si i et j sont deux entiers naturels, on note $\delta_{i,j}$ le nombre qui vaut 1 si $i = j$ et qui vaut 0 sinon.

On note e_i la matrice colonne élémentaire dont le seul coefficient non nul vaut 1 et est placé sur la ligne numéro i .

On munit $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. En identifiant $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a, pour tous X et Y dans $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = X^T X.$$

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, on notera $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres réelles de A .

Si A est une matrice de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et λ une de ses valeurs propres, on notera E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ .

I. Cas des matrices de taille 2×2

1. Dans cette question uniquement, n est un entier naturel non nul quelconque. Déterminer J_n^2 et montrer que $J_n \in \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$.

Dans la suite de cette partie, $n = 1$.

2. Montrer qu'une matrice de taille 2×2 est symplectique si et seulement si son déterminant est égal à 1.
3. Soit M une matrice orthogonale de taille 2×2 . On note $M_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ les deux colonnes de M . Montrer l'équivalence :

$$M \text{ est symplectique} \Leftrightarrow M_2 = -J_1 M_1.$$

4. Soit $X_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Montrer que la matrice constituée des colonnes X_1 et $-J_1 X_1$ est à la fois orthogonale et symplectique.
5. Soit M une matrice de taille 2×2 symétrique et symplectique. Montrer que M est diagonalisable et que ses valeurs propres sont inverses l'une de l'autre. Montrer qu'il existe une matrice P à la fois orthogonale et symplectique telle que $P^{-1} M P$ soit diagonale.
6. Déterminer les matrices de taille 2×2 à la fois antisymétriques et symplectiques et montrer qu'elles ne sont pas diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

II. Cas des matrices symplectiques et orthogonales

Soit K une matrice antisymétrique et φ l'application de $(\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (X, Y) \in (\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(X, Y) = X^T K Y.$$

(On identifie de nouveau $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$.)

7. Montrer que φ est une forme bilinéaire sur $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$.

8. En calculant de deux manières $\varphi(X, X)^T$, montrer que φ est alternée. Montrer de même que φ est antisymétrique. Dans toute la suite du sujet, $K = J_n$.

9. Pour tout $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ et pour tout $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, montrer l'égalité

$$\varphi(X, Y) = \sum_{k=1}^n (x_k y_{k+n} - x_{k+n} y_k).$$

10. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$, $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n}$ (on pourra commencer par le cas où $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ puis généraliser).

11. Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, $J_n X \in X^\perp$ et calculer $\varphi(J_n X, X)$.

12. Si $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$, on note Y^{J_n} l'ensemble des vecteurs Z de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$ tels que $\varphi(Y, Z) = 0$. Montrer que $X^{J_n} = (J_n X)^\perp$.

13. Soit P une matrice symplectique et orthogonale dont les colonnes sont notées $X_1, \dots, X_{2n}$. Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, 2n\}^2$,

$$\begin{cases} \|X_i\| = 1 \\ i \neq j \Rightarrow X_i \perp X_j \\ \varphi(X_i, X_j) = \delta_{i+n, j} - \delta_{i, j+n} \end{cases}.$$

14. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_i^{J_n} = X_{i+n}^\perp$.

15. Sous les mêmes hypothèses, montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $X_{i+n} = -J_n X_i$.

III. Quelques généralités sur les matrices symplectiques

16. Montrer que le déterminant d'une matrice symplectique vaut soit 1, soit -1 .

17. Montrer que l'inverse d'une matrice symplectique est une matrice symplectique.

18. Montrer que le produit de deux matrices symplectiques est une matrice symplectique. L'ensemble $\mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$?

IV. Réduction des matrices symétriques et symplectiques

Le but de cette partie est de montrer que, si $M \in \mathcal{S}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$, il existe $P \in \mathcal{O}_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $P^T M P$ est diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \dots, d_{2n}$ avec, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $d_{k+n} = 1/d_k$.

IV.A - Propriété

19. Montrer que si λ est valeur propre de M , $1/\lambda$ est également valeur propre de M . Donner un vecteur propre associé.

20. Soit $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ et $p = \dim E_\lambda$. Soit $(X_1, \dots, X_p)$ une base de E_λ . Montrer que $(J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ est une base de $E_{1/\lambda}$ et que

$$\dim(E_\lambda) = \dim(E_{1/\lambda}).$$

21. Soient $Y_1, \dots, Y_p$ des vecteurs de $\mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Soit $Y \in \mathcal{M}_{2n,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'implication

$$Y \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p))^\perp \Rightarrow J_n Y \in (\text{Vect}(Y_1, \dots, Y_p, Y, J_n Y_1, \dots, J_n Y_p))^\perp.$$

22. Dans cette question, $\lambda = 1$. Montrer que E_1 est de dimension paire et qu'il existe une base de E_1 orthonormée de la forme $(X_1, \dots, X_p, J_n X_1, \dots, J_n X_p)$ où $2p$ est la dimension de E_1 .

23. Qu'en est-il pour E_{-1} ?

24. Démontrer la propriété annoncée au début de la partie.

IV.B - Mise en application sur un exemple

Dans la fin de cette partie, on note A la matrice

$$A = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 9 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 9 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 9 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

25. Montrer que $A \in \mathcal{S}_4(\mathbb{R}) \cap \mathcal{SP}_4(\mathbb{R})$.

26. Construire une matrice orthogonale et symplectique P telle que $P^T A P$ soit diagonale.