

L'usage des calculatrices est interdit

Le sujet se compose de deux problèmes indépendants. Veuillez changer de page au début de chacun d'entre eux.

Problème I

(inspiré de Centrale PC 2012 maths 1)

Partie I : Études de séries entières

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière associée $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ admet un rayon de convergence $R_a = 1$

et on note f la somme de cette série, définie par

$$\forall x \in]-1, 1[, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

On dira que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ vérifie la propriété

(P_1) si $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ quand $x \rightarrow 1, x < 1$.

(P_2) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$.

(P_3) si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = 1$, où $\tilde{a}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$.

On se propose d'étudier certains des liens entre ces trois propriétés, d'abord au travers d'exemples puis de façon plus générale dans la dernière partie.

1. (P_1) n'entraîne pas (P_2)

a) Déterminer une suite réelle $(b_n)_{n \geq 0}$ telle que

$$\forall x \in]-1, 1[, \frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

b) En déduire un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui vérifie (P_1) mais que ne vérifie pas (P_2) .

2. (P_1) n'entraîne pas (P_3)

Soit φ la fonction définie sur $] -1, 1[$ par $\forall x \in] -1, 1[, \varphi(x) = \frac{1}{(1+x)^2(1-x)}$.

a) Déterminer des réels (a, b, c) tels que $\varphi(x) = \frac{a}{1+x} + \frac{b}{(1+x)^2} + \frac{c}{1-x}$.

b) En déduire une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $\forall x \in] -1, 1[, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$; donner les valeurs des termes v_{2n} et v_{2n+1} (sous une forme « simple »).

c) Calculer $\tilde{v}_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k$ et en déduire un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 0}$ qui vérifie (P_1) mais qui ne vérifie pas (P_3) .

3. Un exemple qui vérifie (P_1) et (P_2)

Dans cette question, on considère la fonction f définie, lorsque la série converge, par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$$

a) Déterminer le rayon de convergence de cette série entière, ainsi que le domaine de définition de la fonction f .

b) Soit $x \in]0, 1[$ fixé; montrer que la fonction $\varphi_x : t \mapsto \frac{x^t}{\sqrt{t}}$ est décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et en déduire l'encadrement suivant :

$$\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt.$$

c) En utilisant le changement de variable $u = -t \ln(x)$, toujours avec $x \in]0, 1[$ fixé, montrer que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{K}{\sqrt{1-x}},$$

où $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est une intégrale dont vous justifierez l'existence.

d) Justifier que f^2 (c'est un carré et non une composée) est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et déterminer une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall x \in] -1, 1[, f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

puis vérifier que $c_{2n+1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}}$, pour $n \geq 1$.

e) À l'aide d'une comparaison série intégrale, montrer que, pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} + \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t(2n+1-t)}} \leq \frac{1}{2} c_{2n+1} \leq \int_1^n \frac{dt}{\sqrt{t(2n+1-t)}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

f) Calculer la dérivée de la fonction $\theta_n : t \mapsto \arcsin \left(\sqrt{\frac{t}{2n+1}} \right)$ et en déduire la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la suite $(c_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

On admettra qu'un calcul analogue permet de montrer que la suite $(c_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la même limite que la suite (c_{2n+1}) .

g) Déterminer, à partir de la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$, un exemple de suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui vérifie les propriétés (P_1) et (P_2) .

Partie II : La preuve de Karamata

Dans cette partie, on suppose que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété (P_1) et on suppose de plus que

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq 0.$$

On se propose de démontrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_3) (théorème de Hardy-Littlewood).

1. a) Déterminer, pour $p \in \mathbb{N}$, la limite quand x tend vers 1 de $\frac{1-x^{p+1}}{1-x}$ et la comparer à la valeur de $\int_0^1 t^p dt$.
- b) En déduire que si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t) dt$$

On pourra commencer par les polynômes $P = X^p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

2. Soient g une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. On admet qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in [0, 1], |g(x) - P(x)| \leq \varepsilon$ et on fixe un tel polynôme P .

a) Justifier que

$$\left| \int_0^1 P(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \varepsilon$$

puis, pour $x \in [0, 1[$,

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (P(x^n) - g(x^n)) \right| \leq \varepsilon (1-x) f(x)$$

b) En déduire

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t) dt.$$

3. Soit h la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$h(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in [e^{-1}, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que, bien que h ne soit pas continue sur $[0, 1]$, elle vérifie elle aussi

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n h(x^n) = \int_0^1 h(t) dt.$$

En calculant la limite, quand $N \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$, de $(1 - X_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X_N^n h(X_N^n)$, où $X_N = e^{-1/N}$, montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie (P_3) .

_____ fin du problème I _____

Problème II : Autour de la loi faible des grands nombres

(Extrait de Centrale PC 2017 maths 2)

Dans ce problème, toutes les variables aléatoires sont réelles, discrètes et définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour toute variable aléatoire X d'espérance finie, on note $E(X)$ l'espérance de X .

Soit α un réel strictement positif. On dit que la variable aléatoire réelle discrète X admet un moment exponentiel d'ordre α si la variable aléatoire $e^{\alpha|X|}$ est d'espérance finie. *Cela signifie, par le théorème de transfert, que si $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, avec $x_i \neq x_j$ si $i \neq j$, la série $\sum_{n \geq 0} e^{\alpha|x_n|} P(X = x_n)$ est absolument convergente.*

Préliminaires

Les trois questions de ces préliminaires sont indépendantes.

On rappelle que la fonction cosinus hyperbolique, que l'on note ch , est définie, pour tout réel t , par

$$\text{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

1. a) Donner le développement en série entière de la fonction cosinus hyperbolique et celui de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto e^{t^2/2}$. On donnera le rayon de convergence de ces deux séries entières.
b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}, \text{ch}(t) \leq e^{t^2/2}$.
2. Soit a et b deux réels vérifiant $a < b$. Montrer que $\forall \lambda \in [0, 1], e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b$.
3. Soit g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\forall t \in \mathbb{R}^+, g(t) = te^{-\gamma t}$ où $\gamma \in \mathbb{R}^{+*}$; montrer que g est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Partie I : Variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel

1. Soit α un réel strictement positif et X une variable aléatoire discrète admettant un moment exponentiel d'ordre α . Montrer que la variable aléatoire $e^{\alpha X}$ admet une espérance finie.
2. Pour chacune des variables aléatoires réelles suivantes, déterminer les réels α strictement positifs tels que la variable aléatoire admette un moment exponentiel d'ordre α et calculer $E(e^{\alpha X})$ dans ce cas.
 - a) X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.
 - b) Y une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p , où p est un réel strictement compris entre 0 et 1.
 - c) Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre n et p , où n est un entier strictement positif et p est un réel strictement compris entre 0 et 1.

Partie II : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans la suite du problème, on considère ε un réel strictement positif, X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\{x_p, p \in \mathbb{N}\}$, et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

On fera attention au fait que l'on n'a pas nécessairement $\lim_{p \rightarrow +\infty} x_p = +\infty$ et que la suite $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ n'a pas forcément de limite.

Pour tout entier n strictement positif, on définit la variable aléatoire S_n par $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Dans cette partie, on suppose que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α où α est un réel strictement positif.

1. Montrer que la variable X admet une espérance finie. *On pourra utiliser la question 3 du préliminaire.*
On notera m l'espérance de X .
2. Appliquer, avec les justifications utiles, la loi faible des grands nombres pour la suite de variables aléatoires (X_k) .

3. a) Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto E(e^{tX})$ est définie et continue sur le segment $[-\alpha, \alpha]$.
 b) Montrer que la fonction Ψ est dérivable sur l'intervalle $] - \alpha, \alpha[$ et montrer que sa fonction dérivée vérifie

$$\forall t \in] - \alpha, \alpha[, \Psi'(t) = E(Xe^{tX}).$$

4. On considère l'application f_ε définie par

$$f_\varepsilon : \begin{array}{ccc} [-\alpha, \alpha] & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ t & \longmapsto & e^{-(m+\varepsilon)t} \Psi(t) \end{array}$$

- a) Donner les valeurs de $f_\varepsilon(0)$ et $f'_\varepsilon(0)$.
 b) En déduire qu'il existe un réel t_0 appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ vérifiant $0 < f_\varepsilon(t_0) < 1$.
5. Montrer que pour tout réel t appartenant au segment $[-\alpha, \alpha]$ et tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire réelle e^{tS_n} admet une espérance égale à $(\Psi(t))^n$.
6. a) Soit t un réel appartenant à l'intervalle $]0, \alpha[$ et soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$.
 Montrer que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$, puis que $P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n$.
 b) En déduire qu'il existe un réel r appartenant à l'intervalle $]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq r^n$.
7. Montrer qu'il existe $s \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2s^n$.
 Comparer ce résultat à la majoration obtenue avec la loi faible des grands nombres.

Partie III : Une majoration de $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right)$

Dans cette partie, on suppose qu'il existe un réel c strictement positif tel que la variable aléatoire réelle discrète X vérifie $E(X) = 0$ et $\forall \omega \in \Omega, |X(\omega)| \leq c$.

1. Montrer que la variable aléatoire X admet un moment exponentiel d'ordre α pour tout réel α strictement positif.
 Les fonctions Ψ et f_ε introduites dans la partie II sont ainsi définies sur $\mathbb{R}$.
2. On considère Y la variable aléatoire réelle définie par $Y = \frac{1}{2} - \frac{X}{2c}$.
 a) Vérifier que $X = -cY + (1 - Y)c$.
 b) Montrer que $e^X \leq Ye^{-c} + (1 - Y)e^c$.
3. a) Montrer que $E(e^X) \leq \text{ch}(c)$.
 b) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \Psi(t) \leq \text{ch}(ct)$.
4. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, f_\varepsilon(t) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{1}{2}c^2t^2\right)$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.
6. Soit n un entier naturel non nul, p un élément de l'intervalle $]0, 1[$ et Z une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre (n, p) .
 À l'aide de la question précédente, majorer $P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right)$ en fonction de n, p et ε .

————— Fin du problème II —————