

Problème 1 : (inspiré de Centrale PC 2012 maths 1)

Partie I

1. a) Si $|x| < 1$, $\frac{1}{1-x^2} = \left(\frac{1/2}{1-x} + \frac{1/2}{1+x} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \right)$ donc $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+(-1)^n}{2} x^n$ si $|x| < 1$
- b) Comme $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{2(1-x)}$, la suite $a_n = 1 + (-1)^n$ vérifie (P_1) mais pas (P_2) car $a_{2n} = 2$ ne tend pas vers 0.
2. a) On trouve $\varphi(x) = \frac{1/4}{1+x} + \frac{1/2}{(1+x)^2} + \frac{1/4}{1-x}$.
- b) Si $|x| < 1$, $\varphi(x) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (n+1) x^n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ donc $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (2n+3) + 1}{4} x^n$
donc $v_{2n} = n+1$ et $v_{2n+1} = -(n+1)$.
- c) On en déduit $v_{2n} + v_{2n+1} = 0$ donc $\tilde{v}_{2n} = \frac{1}{2n+1} v_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ et $\tilde{v}_{2n+1} = 0$ donc $(\tilde{v}_n)$ ne converge pas. De plus $\varphi(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \frac{1}{4(1-x)}$ donc il suffit de prendre $a_n = 4v_n$ pour trouver une suite vérifiant (P_1) mais pas (P_3) puisque $\tilde{a}_n = 4\tilde{v}_n$.
3. a) $\left(\frac{\rho^n}{\sqrt{n}} \right)_{n \geq 1}$ est bornée (avec $\rho \in \mathbb{R}^+$) si et seulement si $\rho \in [0, 1]$ donc $\boxed{R=1}$ De plus $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ DV alors que $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ CV donc $\boxed{D_f = [-1, 1[}$
- b) $\varphi_x(t) = \frac{e^{t \ln x}}{\sqrt{t}}$ et $\ln(x) < 0$ donc φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. De plus $\varphi_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\varphi_x(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$
donc φ_x est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$. Par décroissance de φ_x , on a, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_x(k+1) \leq \int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(k)$
donc $\int_k^{k+1} \varphi_x(t) dt \leq \frac{x^k}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \varphi_x(t) dt$ qui est aussi valable pour $k=1$ par intégrabilité de φ_x sur $]0, 1]$.
En sommant ces inégalités pour $k \geq 1$, on obtient $\boxed{\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt}$ pour $x \in]0, 1[$
- c) $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est $\mathcal{CM}^0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ et $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\boxed{t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ Comme $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue positive et non nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a aussi $K > 0$.
 $u \mapsto \frac{-u}{\ln x}$ est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $\int_0^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ et $\int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt = \frac{1}{\sqrt{-\ln x}} \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$. Comme $\sqrt{-\ln x} > 0$, on a l'encadrement, valable pour tout $x \in]0, 1[$, $\int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \sqrt{-\ln x} \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = K$. Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 1} \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = K$, par encadrement, $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{-\ln x} \times f(x) = K \neq 0$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{\frac{K}{-\ln x}}$ puis $\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} \sqrt{\frac{K}{1-x}}}$ car $-\ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} (1-x)$.
- d) On pose $a_0 = 0$ et $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ pour $n \geq 1$ de sorte que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour $|x| < 1$. Par produit de Cauchy, on a, pour $|x| < 1$, $f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ avec $c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}$ donc $c_0 = 0$ et $c_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}} \times \frac{1}{\sqrt{n-k}}$ pour $n \geq 1$.
Ainsi, $\boxed{f(x)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \right) x^n}$ pour $|x| < 1$
On a $c_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}} + \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}}$; on pose $h = 2n+1-k$ dans

la 2^{ème} somme et on a $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}} = \sum_{h=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2n+1-h)h}}$ donc $c_{2n+1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k(2n+1-k)}}$

e) La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(2n+1-t)}}$ est continue et décroissante sur $]0, n + \frac{1}{2}[$ donc, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on

a $h(k+1) \leq \int_k^{k+1} h(t) dt \leq h(k)$ puis, en sommant pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on obtient l'encadrement souhaité :
 $\frac{1}{2}c_{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \leq \int_1^n h(t) dt \leq \frac{1}{2}c_{2n+1} - \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

f) θ_n est $\mathcal{C}^1$ sur $]-(2n+1), 2n+1[$ et $\theta'_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \times \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{t}{2n+1}}} = \frac{1}{2\sqrt{t(2n+1-t)}}$. On en déduit $\int_1^n h(t) dt = \left[2 \arcsin \sqrt{\frac{t}{2n+1}} \right]_1^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\frac{\pi}{4}$. Par encadrement, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_{2n+1} = \pi$$

g) Si on pose $a_n = \frac{c_n}{\pi}$, la suite (a_n) vérifie (P_1) et on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 1$ (car (c_{2n}) et (c_{2n+1}) CV vers π toutes les deux) donc (a_n) vérifie (P_2) .

Partie II

1. a) $\frac{1-x^{p+1}}{1-x} = \sum_{k=0}^p x^k \xrightarrow{x \rightarrow 1} (p+1)$ et $\int_0^1 t^p dt = \frac{1}{p+1}$

b) Pour $P = X^p$, on a $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n n^{(1+p)} = \frac{1-x}{1-x^{p+1}} (1-x^{p+1}) f(x^{p+1}) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \frac{1}{p+1}$ car, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x^{p+1}) f(x^{p+1}) = 1$. On a donc $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t) dt$ pour tous les $P = X^p$.

Si $P = \sum_{p=0}^d \alpha_p X^p$ alors $(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) \xrightarrow{\text{somme finie}} \sum_{p=0}^d \alpha_p \left((1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n n^{(p+1)} \right) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \sum_{p=0}^d \alpha_p \int_0^1 t^p dt$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(t) dt \text{ si } P \in \mathbb{R}[X]$$

2. a) $\left| \int_0^1 P(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \int_0^1 |P(t) - g(t)| dt \leq \varepsilon \int_0^1 dt = \varepsilon$.

$|a_n x^n (P(x^n) - g(x^n))| \leq a_n x^n |P(x^n) - g(x^n)| \leq \varepsilon a_n x^n$ car $a_n \geq 0$ et $x^n \in [0, 1]$. En ajoutant ces inégalités (la série de droite CV et sa somme est $f(x)$), on obtient, avec l'inégalité triangulaire, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (P(x^n) - g(x^n)) \right| \leq \varepsilon (1-x) f(x)$$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) f(x) = 1$ donc $x \mapsto (1-x) f(x)$ est prolongeable par continuité au segment $[0, 1]$ donc bornée sur ce segment : $|(1-x) f(x)| \leq C$ pour $x \in [0, 1]$. Ainsi, pour $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) - \int_0^1 g(t) dt \right| &\leq \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n (g(x^n) - P(x^n)) \right| + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) - \int_0^1 P(t) dt \right| \\ &\quad + \left| \int_0^1 P(t) dt - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq \varepsilon (1-x) f(x) + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) - \int_0^1 P(t) dt \right| + \varepsilon \\ &\leq (1+C)\varepsilon + \left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) - \int_0^1 P(t) dt \right| \end{aligned}$$

D'après II.1.b, il existe $r > 0$ tel que pour $0 < 1-x < r$, on ait $\left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n P(x^n) - \int_0^1 P(t) dt \right| \leq \varepsilon$

donc $\left| (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) - \int_0^1 g(t) dt \right| \leq (2+C)\varepsilon$ pour $0 < 1-x < r$, ce qui est exactement la définition

$$\text{de } \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n g(x^n) = \int_0^1 g(t) dt$$

3. On peut commencer par remarquer que $\lim_{N \rightarrow +\infty} X_N = 1$. De plus $h(X_N^n) = h(e^{-n/N}) = \begin{cases} e^{n/N} & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$(1 - X_N) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X_N^n h(X_N^n) = (1 - X_N) \sum_{n=0}^N a_n. \text{ D'après la propriété admise pour } h \text{ et par composition des limites,}$$

$$\text{on a } \lim_{N \rightarrow +\infty} (1 - X_N) \sum_{n=0}^N a_n = \int_0^1 h(t) dt = \left[\ln x \right]_{e^{-1}}^1 = 1. \text{ Enfin, comme } 1 - X_N = 1 - e^{-1/N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{N} \sim \frac{1}{N+1},$$

$$\text{on a } \boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{a}_N = 1}$$

Le théorème de Cesaro assure que toute suite qui vérifie (P_2) vérifie aussi (P_3) . Par contre, même avec l'hypothèse $a_n \geq 0$, (P_1) n'implique pas (P_2) comme le montre l'exemple de la question I.1.b.

Problème 2 : (Centrale PC 2017 maths 2)

Préliminaires

1. a) Si $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ et $e^{x^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}$ (les deux RCV valent $+\infty$).
 b) On a $e^{t^2/2} - \text{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!} \right) t^{2n} \geq 0$ car $2^n n! = 2 \times 4 \times \dots \times (2n) \leq 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (2n-1)(2n) = (2n)!$

2. La fonction $\exp$ est convexe sur $\mathbb{R}$ car $\exp'' = \exp \geq 0$ donc $\boxed{\forall \lambda \in [0, 1], e^{\lambda a + (1-\lambda)b} \leq \lambda e^a + (1-\lambda)e^b}$

3. On étudie $\varphi : t \mapsto te^{-\gamma t}$ sur $\mathbb{R}^+ : \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ et positive ; $\varphi'(t) = e^{-\gamma t}(1 - \gamma t)$ donc $0 \leq \varphi(t) \leq \varphi\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ et

$$\boxed{\varphi \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+}$$

Partie I

1. On suppose $\sum e^{\alpha|x_n|} P(X = x_n)$ ACV. Comme $\alpha > 0$, $\alpha x_n \leq \alpha|x_n|$ donc $0 \leq e^{\alpha X} \leq e^{|\alpha|X}$ donc, d'après le théorème de comparaison, comme $E(e^{|\alpha|X})$ est finie, $\boxed{E(e^{\alpha X}) \text{ existe}}$

2. a) $e^{\alpha|n|} P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{(e^\alpha \lambda)^n}{n!}$ donc $E(e^{\alpha|X|})$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\boxed{E(e^{\alpha X}) = \exp(\lambda(e^\alpha - 1))}$

- b) $e^{\alpha|n|} P(Y = n) = pe^\alpha ((1-p)e^\alpha)^{n-1}$ donc X admet un moment exponentiel d'ordre α si et seulement si $|1-p|e^\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha < -\ln(1-p)$ et $\boxed{E(e^{\alpha X}) = \frac{pe^\alpha}{1 - (1-p)e^\alpha} \text{ pour } \alpha < -\ln(1-p)}$

- c) $Z(\Omega)$ est un ensemble fini donc $E(e^{\alpha|Z|})$ existe pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $E(e^{\alpha X}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (pe^\alpha)^k (1-p)^{n-k}$ donc

$$\boxed{E(e^{\alpha X}) = (1-p + pe^\alpha)^n \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R}}$$

Partie II

1. La fonction $t \mapsto te^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, ie il existe $C > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, t \leq Ce^{\alpha t}$ donc $|x_n| \leq Ce^{\alpha|x_n|}$ puis $0 \leq X \leq Ce^{\alpha|X|}$ donc, d'après le théorème de comparaison (avec $e^{\alpha|X|}$ d'espérance finie), $\boxed{E(X) \text{ existe}}$

2. Pour appliquer la loi faible des grands nombres, il faut justifier que X^2 admet une espérance : $t \mapsto t^2 e^{-\alpha t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$ (même étude de fonction que pour le préliminaire) ; il existe donc $D > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^2 \leq De^{\alpha t}$ puis $0 \leq X^2 \leq De^{\alpha|X|}$ donc, d'après le théorème de comparaison, $E(X^2)$ existe. On en déduit, les X_i étant indépendantes,

$$\boxed{P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{V(X)}{n\varepsilon^2}}$$

3. a) Si $|t| \leq \alpha$ alors $0 \leq e^{tx_n} P(X = x_n) \leq e^{\alpha|x_n|} P(X = x_n)$ donc $\Psi(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{tx_n} P(X = x_n)$ existe. On pose

$$u_n(t) = e^{tx_n} P(X = x_n) \text{ et on applique le théorème de continuité des séries de fonctions :}$$

H1 : Les fonctions u_n sont continues sur $[-\alpha, \alpha]$

H2 : $|u_n(t)| \leq e^{\alpha|x_n|} P(X = x_n)$ (indép de t) donc $\|u_n\|_{\infty, [-\alpha, \alpha]} \leq e^{\alpha|x_n|} P(X = x_n)$, qui est le terme général d'une série convergente, donc $\sum u_n$ CVN sur $[-\alpha, \alpha]$

$$\text{On en déduit } \boxed{\Psi \text{ est continue sur } [-\alpha, \alpha]}$$

- b) On applique cette fois le théorème de dérivation :

H1 : les fonctions u_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $] -\alpha, \alpha[$

H2 : $\sum u_n$ CVS sur $] -\alpha, \alpha[$ par CVN (d'après **II.3.a**)

H3 : $u'_n(t) = x_n e^{tx_n} P(X = x_n)$ donc $|u'_n(t)| \leq |x_n| e^{tx_n} P(X = x_n)$; soit $[-a, a] \subset] -\alpha, \alpha[$, on a donc $\|u'_n\|_{\infty, [-a, a]} \leq |x_n| e^{a|x_n|} P(X = x_n) = \beta_n$; la fonction $t \mapsto te^{(a-\alpha)t}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$, d'après le préliminaire, donc $\beta_n \leq Ce^{\alpha|x_n|}$ et $\sum \beta_n$ converge. On en déduit que $\sum u'_n$ CVNTS de $] -\alpha, \alpha[$

Ainsi, $\Psi \in \mathcal{C}^1(]-\alpha, \alpha[)$ et $\Psi'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^{tx_n} P(X = x_n)$ donc, par théorème de transfert, $\Psi'(t) = E(Xe^{tX})$ si $|t| < \alpha$

4. a) $\Psi(0) = E(1) = 1$, $\Psi'(0) = E(X) = m$ et $f'_\varepsilon(t) = e^{-(m+\varepsilon)} (\Psi'(t) - (m+\varepsilon)\Psi(t))$, on a $f_\varepsilon(0) = 1$ et $f'_\varepsilon(0) = -\varepsilon$
b) D'après la formule de Taylor-Young, comme Ψ est $\mathcal{C}^1$ sur $] -\alpha, \alpha[$, on a $f(t) = 1 - \varepsilon t + o(t)$ donc $f_\varepsilon(t) - 1 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -\varepsilon t$ donc si $t > 0$ est suffisamment petit, on a $0 < f_\varepsilon(t) < 1$, ce qui justifie l'existence de $t_0 \in]0, \alpha[$.

5. On a $e^{tS_n} = \prod_{k=1}^n e^{tX_k}$; les X_i étant indépendantes, les e^{tX_i} le sont aussi donc $E(e^{tS_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{tX_k})$, ce qui donne

$$\text{bien } E(e^{tS_n}) = (\Psi(t))^n$$

6. a) Pour $t > 0$, on a $\frac{S_n(\omega)}{n} \geq m + \varepsilon \Leftrightarrow tS_n(\omega) \geq nt(m + \varepsilon) \Leftrightarrow e^{S_n(\omega)} \geq e^{nt(m+\varepsilon)} = (e^{t(m+\varepsilon)})^n$ donc

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) = P\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right)$$

$$\text{On peut alors appliquer l'inégalité de Markov à la variable positive } e^{tS_n} : \text{ on a } P\left(e^{tS_n} \geq (e^{t(m+\varepsilon)})^n\right) \leq \frac{E(e^{tS_n})}{(e^{t(m+\varepsilon)})^n} = \left(\frac{\Psi(t)}{e^{t(m+\varepsilon)}}\right)^n \text{ donc } P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n$$

b) Il suffit de prendre $r = f_\varepsilon(t_0)$ avec le réel t_0 introduit à la question **II.4.b**

7. Comme $\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) \cup \left(\frac{S_n}{n} \leq m - \varepsilon\right)$, les deux événements étant incompatibles, on a $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \geq m + \varepsilon\right) + P\left(\frac{S_n}{n} \leq m - \varepsilon\right)$. Pour majorer la seconde probabilité, on applique la question précédente à la suite $(-X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, qui vérifie les mêmes hypothèses que la suite (X_k) (en particulier $-X$ admet elle aussi un moment exponentiel d'ordre α , le même que X) : comme $E(-X) = -m$, il existe donc un réel $r' \in]0, 1[$ tel que $P\left(-\frac{S_n}{n} \geq -m + \varepsilon\right) \leq (r')^n$ donc $P\left(\frac{S_n}{n} \leq m - \varepsilon\right) \leq (r')^n$. Avec $q = \max\{r, r'\} < 1$, on a

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2q^n.$$

Cette majoration est meilleure que celle donnée par la loi faible des grands nombres puisque $q^n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Partie III

1. On a $0 \leq e^{\alpha|X|} \leq e^{\alpha c}$ donc $e^{\alpha|X|}$ est bornée donc admet une espérance finie (théorème de comparaison);

$$X \text{ admet un moment exponentiel pour tout } \alpha \in \mathbb{R}$$

2. a) On a $-cY + c(1 - Y) = -c\left(\frac{1}{2} - \frac{X}{2c}\right) + c\left(\frac{1}{2} + \frac{X}{2c}\right) = X$.

b) Comme $|X| \leq c$, on a $Y \in [0, 1]$, il suffit d'appliquer la question 2 du préliminaire avec $a = -c$, $b = c$ et $\lambda = Y$.

3. a) On a $E(Y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c}E(X) = \frac{1}{2}$ et par croissance de l'espérance, $E(e^X) \leq e^{-c}E(Y) + e^c(1 - E(Y)) = \text{ch}(c)$.

b) En appliquant ce qui précède à la variable tX qui vérifie $E(tX) = tE(X) = 0$ et $|tX| \leq tc$, on obtient

$$\Psi(t) \leq \text{ch}(ct) \text{ si } t > 0$$

4. On a $m = 0$ donc $f_\varepsilon(t) = e^{-\varepsilon t} \Psi(t) \leq e^{-\varepsilon t} \text{ch}(ct)$ et avec la question 1.a du préliminaire, $\text{ch}(ct) \leq e^{c^2 t^2 / 2}$ donc

$$f_\varepsilon(t) \leq e^{-\varepsilon t + c^2 t^2 / 2}$$

5. On applique **II.6.a**, avec $m = 0$, et on obtient $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq (f_\varepsilon(t))^n \leq e^{n(-\varepsilon t + c^2 t^2 / 2)}$ pour tout $t > 0$ et si on

choisit $t = \frac{\varepsilon}{c^2}$, on obtient $P\left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$.

On applique alors la même chose à la suite $(-X_k)$, qui vérifie à nouveau les mêmes hypothèses que (X_k) , et on trouve aussi $P\left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon\right) \leq \exp\left(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$. Comme $\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) = \left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon\right) \cup \left(\frac{S_n}{n} \leq -\varepsilon\right)$, les événements étant

incompatibles, on a $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$

6. On introduit une famille $(X_k)_{k \in [1, n]}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent une loi $\mathcal{B}(p)$, de sorte que si on pose $Z = \sum_{k=1}^n X_k$, on a $Z \sim \mathcal{B}(n, p)$. On vérifie alors que $\frac{Z}{n} - p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - E(X_k))$ puisque $E(X_k) = p$. Si on pose $X_k^* = X_k - E(X_k)$, on a $X_k^*(\Omega) = \{-p, 1-p\}$ donc $|X_k^*| \leq 1$ et $E(X_k^*) = 0$ par linéarité de E donc on peut appliquer **III.5** à la famille $(X_k^*)_{k \in [1, n]}$. On en déduit
$$P\left(\left|\frac{Z}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-n \frac{\varepsilon^2}{2c^2}\right)$$