

I Limites et continuité

Exercice 1 [Solution]

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en $(0, 0)$?

$$f_1(x, y) = (x + y) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \quad ; \quad f_2(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad ; \quad f_3(x, y) = \frac{|x + y|}{x^2 + y^2}$$

$$f_4(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad ; \quad f_5(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x \quad ; \quad f_6(x, y) = x^y \quad ; \quad f_7(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Exercice 2 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Soit $H(x, y) = \frac{x^4 y}{(x^4 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $H(0, 0) = 0$. H est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

indication : oui ; majorer différemment selon que $|y| \leq x^2$ ou $|y| \geq x^2$.

II Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Exercice 3 (CCP PSI 2011) [Solution]

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Etudier le caractère $\mathcal{C}^1$ de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2014) [Solution]

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par $f(x, y) = (x + y)^p \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)$.

1. La fonction f a-t-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}^2$?
2. Pour quelles valeurs de p , f admet-elle des dérivées partielles en $(0, 0)$?
3. Pour quelle valeur de p la fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soient $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$ et $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x + y} & \text{si } (x, y) \notin F \\ 0 & \text{si } (x, y) \in F \end{cases}$

1. Justifier que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus F)$
2. Montrer que, si $(x, y) \notin F$, $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3f(x, y)$
3. Existence et valeurs de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$?
4. f est-elle continue en $(0, 0)$?

Exercice 6 (CCP MP 2006) [Solution]

On pose $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2015) [Solution]

On pose $H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $H(0, 0) = 0$. H est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8 (CCINP PSI 2019) [Solution]

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

3. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Exercice 9 (CCINP PSI 2023) [Solution]

Soit $f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. f est-elle $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 10 (ENSEA PSI 2021) [Solution]

Soit $f(x, y) = \begin{cases} \frac{3xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11 [Solution]

Étudier l'existence de dérivées partielles pour les fonctions :

$$f_1(x, y) = \sup\{|x|, |y|\} \quad ; \quad f_2(x, y) = |x| + |y| \quad ; \quad \begin{cases} f_3(x, y) = \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f_3(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Exercice 12 [Solution]

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, calculer les dérivées (ou les dérivées partielles) des fonctions suivantes en fonction des dérivées de f :

$$g_1(x, y) = f(y, x) \quad ; \quad g_2(x) = f(x, x) \quad ; \quad g_3(x, y) = f(y, f(x, x)) \quad ; \quad g_4(x) = f(-x, f(x, x^2))$$

Exercice 13 (Mines-Ponts MP 2011) [Solution]

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$; déterminer $\frac{d}{dx} f(x, 2x)$.

Exercice 14 [Solution]

Soit f définie par : $\begin{cases} f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$

Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0, 0)$ mais qu'elle n'est pas continue en $(0, 0)$.

Exercice 15 (Mines-Ponts MP 2009) [Solution]

Montrer que $l : x \mapsto \frac{x}{\|x\|_2}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $E \setminus \{0\}$ et calculer sa différentielle en $x \neq 0$.

Exercice 16 [Solution]

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \cos(ny)}{\sqrt{n}}$ est définie et admet des dérivées partielles sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.

Exercice 17 (Mines-Ponts PSI 2023) [Solution]

Soit $f(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{1 + y^{2n}}$

1. Déterminer le domaine de définition D de f et le représenter.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f

Exercice 18 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Pour $a \in \mathbb{R}^{+*}$ on pose $u_n(a, x) = \frac{x^n}{n + a}$ et $F(a, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a, x)$.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n+a}$ pour a fixé.
2. Montrer que $|u_n(a, x) - u_n(a', x)| \leq \frac{|(a - a')|}{n^2}$, si $|x| < 1$, et en déduire que F est continue.
indication : majorer $|F(a, x) - F(a', x)|$ en introduisant $F(a', x)$
3. $\frac{\partial F}{\partial x}$ existe-t-elle ? Est-elle continue ?
indication : prendre $x \in [-\alpha, \alpha] \subset]-1, 1[$
4. $\frac{\partial F}{\partial a}$ existe-t-elle ? Est-elle continue ?
indication : $(a, a') \in [0, A]$ pour la continuité

Exercice 19 (CCP PSI 2007) [Solution]

Soit $f : (x, y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan \left(\frac{x+y}{1-xy} \right)$.

1. Montrer que le domaine de définition D de f est la réunion de trois ouverts « simples ».
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ puis $\frac{\partial f}{\partial y}$.
3. Simplifier f .

Exercice 20 (Mines-Ponts PSI 2018) [Solution]

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Montrer que ϕ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P) = \int_0^1 f(x, P(x)) dx$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer sa différentielle.

III Équations aux dérivées partielles

Exercice 21 (Mines-Ponts PSI 2016) [Solution]

Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{+*})$ telles que $\forall (x, y) \neq (0, 0), \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = (x^2 + y^2)^p, p \in \mathbb{N}$, où $g(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

Exercice 22 (Centrale PC 2011) [Solution]

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x}$ (on pourra utiliser deux intégrales).
2. Montrer que $\phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (on se placera sur $[-R, R]$ et on utilisera $M_R = \sup_{x^2 + y^2 \leq R} \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right|$)
3. Montrer que $r\phi'(r) = 0$ et conclure que ϕ est constante.
indication : introduire g et passer en polaires.
4. Que dire de $\int_0^{2\pi} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) d\theta$?

Exercice 23 [Solution]

Résoudre en polaires $x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Exercice 24 (Mines-Ponts PSI 2013) [Solution]

Résoudre $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - f = -(x^2 + y^2)$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0), x \in \mathbb{R}^-\}$ (on pourra passer en coordonnées polaires).

Exercice 25 [Solution]

Trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ telles que la fonction g définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ par $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ soit solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = \frac{y}{x^3}$.

Exercice 26 (Centrale PSI 2014) [Solution]

1. Montrer que $\phi : (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x + y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ sur $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2, 2u - v^2 > 0\}$; vérifier que ϕ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et g telle que $f = g \circ \phi$. Montrer que f vérifie $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(y^2 - x^2)f(x, y)$ si et seulement si g vérifie une équation aux dérivées partielles à déterminer.
3. Résoudre cette dernière équation et trouver f .

Exercice 27 (CCP PC 2009) [Solution]

Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$. (on pourra, après en avoir justifié la légitimité, utiliser le changement de variables $u = x + y, v = x - y$).

Exercice 28 (CCINP PSI 2022) [Solution]

Soit $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \partial_1 g(x, y) + \partial_2 g(x, y) = 0$. On pose $h(u, v) = g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$ avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.

1. Calculer $\partial_1 h(u, v)$
2. Trouver (α, β) tels que $h(u, v) = \varphi(v)$ avec $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$
3. Déterminer g

Exercice 29 (Centrale PSI 2010) [Solution]

Résoudre $2 \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ en utilisant un changement de variable du type $u = ax + by, v = cx + dy$.

Exercice 30 (ENSEA-ENSIIE MP 2014) [Solution]

Résoudre $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xy$; on pourra poser $u = x + y, v = x - y$.

Exercice 31 (Mines-Ponts PSI 2010) [Solution]

Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (on pourra utiliser un changement de variable linéaire).

Exercice 32 (Mines-Ponts PSI 2019) [Solution]

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; on pourra utiliser le changement de variable $u = x + ay$ et $v = x + by$

Exercice 33 (CCP PC 2011) [Solution]

Soit E_a l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$ telles que $\forall t > 0, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(tx, ty, tz) = t^a f(x, y, z)$.

1. Montrer que E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.
2. Montrer que si $f \in E_a$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$ alors $\frac{\partial f}{\partial x} \in E_{a-1}$.
3. Montrer que si $f \in E_0$ alors $f(x, y, z) = f(0, 0, 0)$. Que peut-on en déduire sur E_0 ?
4. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ telle que $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = af(x, y, z)$.

Montrer que $g : t \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f(tx, ty, tz) - t^a f(x, y, z)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifie $tg'(t) = ag(t)$. En déduire que $f \in E_a$.

La réciproque est-elle vraie?

IV Extrema

Exercice 34 (CCP PSI 2017) [Solution]

1. Montrer que $f : (x, y) \mapsto x^3 + \ln(4 + y^2)$ admet un unique point critique.
2. Déterminer un équivalent en 0 de $f(x, x^2) - f(0, 0)$; f admet-elle des extremums locaux?

Exercice 35 (CCINP PSI 2018) [Solution]

Trouver les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2)$

Exercice 36 (EIVP PSI 2016) [Solution]

Soit $g(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$. Montrer que $x \mapsto g(x, \lambda x)$ admet un minimum local en 0 pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. g admet-elle un minimum local en $(0, 0)$?

Exercice 37 (CCP PSI 2015) [Solution]

Etudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2 - 5x - y$.

Exercice 38 (Mines-Ponts PSI 2017) [Solution]

Etudier les extrema de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 39 (CCP MP 2015) [Solution]

Etudier les extrema de $f : (x, y) \mapsto x^2 + (y^3 - y)^2$.

Exercice 40 (CCINP PSI 2018) [Solution]

$f : (x, y) \mapsto xy + \frac{4}{x} + \frac{2}{y}$ admet-elle des extrema locaux sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$?

Exercice 41 (CCP PC 2012) [Solution]

Déterminer, s'ils existent, les extremums absolus de $f(x, y) = (x+y)^2 - xy$ sur le domaine $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice 42 (CCP PSI 2015) [Solution]

Extrema globaux puis locaux de $f(x, y) = x^4 y^3 + \ln(1 + y^4)$ sur $[-1, 1]^2$.

Exercice 43 (Mines-Télécom PSI 2023) [Solution]

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 1\}$ et g la fonction définie sur D par $g(x, y) = \begin{cases} xy \ln(x^2 + y^2) & \text{si } 0 < x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{o}{D}$.
2. Montrer que g admet des extremums globaux sur D .
3. A-t-on extremum local en $(0, 0)$? Donner les extremums locaux ou globaux sur le bord de D .

Exercice 44 (ENTPE-EIVP PSI 2015) [Solution]

Extrema de $f(x, y) = xy\sqrt{1-x-y}$ sur $T = \{(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, x+y \leq 1\}$?

Exercice 45 (Centrale PSI 2023) [Solution]

Soient $D = (\mathbb{R}^+)^2$ et f définie sur D par $f(x, y) = \frac{xy}{(1+x)(1+y)(x+y)}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$

1. Montrer que f est continue sur D .
indication : Distinguer $x \geq y$ et $y \geq x$.
2. Montrer que f est majorée sur D .
3. Soit $K = [0, 10]^2$. Montrer que f admet un maximum sur K puis sur D .
4. Déterminer $\max_D(f)$.

Exercice 46 (Centrale PSI 2017) [Solution]

Soient $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$ et $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \max(x, y) \leq 2, \min(x, y) \geq -2\}$

1. f admet-elle des extrema sur A ?
En quels points les extremas locaux peuvent-ils être atteints ?
2. Etudier $f(x, x)$ et $f(x, -x)$; que peut-on en déduire ?
3. Donner les extrema locaux de f sur A puis sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 47 (CCP PC 2009) [Solution]

Soit $(A, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan, R un réel strictement positif, O et O' les points définis par $\overrightarrow{AO} = R\vec{i}$ et $\overrightarrow{AO'} = -R\vec{i}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ les cercles de rayon R et de centre respectifs O et O' . Soient a et b deux réels de $[0, \pi]$, M le point de $\mathcal{C}$ tel que l'argument de l'afixe de $\overrightarrow{OM}$ est a et M' le point de $\mathcal{C}'$ tel que l'afixe de $\overrightarrow{O'M'}$ est b .

1. Déterminer les affixes de M et M' et montrer que l'aire du triangle AMM' est :
$$S = \frac{R^2}{2}(\sin(b)(1 + \cos(a)) + \sin(a)(1 - \cos(b))).$$
2. On note $f : (x, y) \mapsto \sin(y-x) + \sin(x) + \sin(y)$.
Justifier l'existence de $(\alpha, \beta) \in [0, \pi]^2$ tel que $\forall (x, y) \in [0, \pi]^2, f(x, y) \leq f(\alpha, \beta)$.
3. Montrer que $(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ est l'unique point critique de f sur $]0, \pi[^2$.
4. Déterminer l'aire maximale de AMM' .

Exercice 48 (CCP PC 2007) [Solution]

On définit $\sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

1. Montrer que f définie par $f(x, y) = |\sin(x+iy)|^2$ admet un maximum et un minimum sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Quel est le minimum ?

2. Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}$.
3. Trouver les points critiques de f sur $D' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$.
4. Montrer qu'il existe θ_0 tel que le maximum de f sur D soit $f(\cos \theta_0, \sin \theta_0)$.
5. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}^+, \operatorname{sh}(t) \geq t$ et $\sin(t) \leq t$.
6. Montrer que $g : \theta \mapsto f(\cos \theta, \sin \theta)$ est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donner le maximum de f .

Exercice 49 (Centrale PSI 2024) [Solution]

Soient $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\phi : t \mapsto (2\sqrt{2} \cos(t), 2 \sin(t))$.

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ sur E .
2. Soient $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 \leq 8\}$ et $f : (x, y) \mapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} + x^2$.
 - a) Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.
 - b) Étudier les extremum de f sur $\overset{\circ}{\Delta}$
 - c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ

Exercice 50 (Centrale PSI 2018) [Solution]

Soit $f(x, y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

1. Déterminer le gradient de f aux points $(1, 1)$ et $(1, 2)$; en déduire l'équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ aux points $(1, 1, f(1, 1))$ et $(1, 2, f(1, 2))$.
2. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, 2x^2)$. La fonction f admet-elle des extremums globaux?
3. Déterminer le signe de $f(x, ax)$ et $f(0, y)$ lorsque x et y sont proches de 0, pour $a \in \mathbb{R}$. La fonction f admet-elle des extremums locaux?

Exercice 51 (Centrale PSI 2019) [Solution]

1. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $a \in U$. On suppose que f admet un extremum local en a . Que peut-on en déduire?
Montrer que ce n'est plus le cas si on ne suppose plus U ouvert.
2. Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (ax + by)e^{-(x^2 + y^2)}$ avec $a, b \in \mathbb{R}^*$. Déterminer le gradient et les points critiques de f
3. Étudier les extrema locaux et absolus de f .
indication : commencer par vérifier que f admet des extrema absolus en regardant la limite de f quand $\|(x, y)\|$ tend vers $+\infty$.

Exercice 52 (CCP PSI 2013) [Solution]

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ symétrique, de valeurs propres strictement positives.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^n, (f(x)|x) > 0$.
2. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit g par $g(x) = \frac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que g admet des dérivées partielles et les expliciter.
3. Montrer que g admet un unique point critique et que ce point critique est un minimum global.

V Applications à la géométrie

Exercice 53 [Solution]

Soit S la surface d'équation $xy = z$ et D la droite d'équation $\begin{cases} x = 2 \\ y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

1. La surface S est-elle régulière?
2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent contient D .

Exercice 54 (CCP PSI 2007) [Solution]

1. Déterminer une équation du plan tangent P_0 à la surface d'équation $xyz = 1$ au point (x_0, y_0, z_0) .
2. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal de O sur P_0 .

Exercice 55 (Centrale PC 2010) [Solution]

Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; trouver l'ensemble Γ des points de S où la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ est parallèle au plan tangent à S .

Exercice 56 [Solution]

Soit S la surface d'équation $x^4 - x^3 + xy - y^2 - z = 0$.

1. Montrer que S est une surface régulière.
2. Déterminer les points de S en lesquels le plan tangent est parallèle à xOy .

Solutions

Exercice 1 [sujet] 1. $|f_1(x, y)| \leq |x + y|$ donc $\lim_{(0,0)} f_1 = 0$

2. $f_2(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ et $f_2(0, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} -1$ donc pas de limite en $(0, 0)$

3. $f_3(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ donc pas de limite en $(0, 0)$.

4. $|f_4(x, y)| \leq \frac{2N_2(x, y)^3}{N_2(x, y)^2} = 2N_2(x, y)$ donc $\lim_{(0,0)} f_4 = 0$

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim_{(0,0)} f_5 = -1$

6. $f_6(x, y) = e^{y \ln(x)}$ donc f_6 est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ et $f_6(x, 0) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et $f_6\left(t, \frac{1}{\ln t}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} e$ donc pas de limite en $(0, 0)$.

7. $|\sin(u)| \leq |u|$ donc $|f_7(x, y)| \leq \frac{N_2(x, y)^2}{N_2(x, y)}$ et $\lim_{(0,0)} f_7 = 0$

Exercice 2 [sujet] H est $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ puis si $|y| \leq x^2$, on a $|H(x, y)| \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2}{N_2(x, y)} \leq N_2(x, y)$ alors que si $|y| \geq x^2$, on a $|H(x, y)| \leq \frac{x^4}{|y|N_2(x, y)} \leq \frac{x^2}{N_2(x, y)} \leq N_2(x, y)$ donc H est continue en $(0, 0)$

Exercice 3 [sujet] 1. $|f(x, y)| \leq N_2(x, y)$

2. $f(x, 0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0^+} 1$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$

Exercice 4 [sujet] 1. $|f(x, y)| \leq |x + y|^p \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ car $p \geq 1$ donc $\lim_{(0,0)} f = 0$

2. $\frac{1}{x}f(x, 0) = x^{p-1} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ pour $p \geq 2$ et n'existe pas pour $p = 1$.

3. Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = p(x + y)^{p-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) - \frac{2x(x + y)^p}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq p|x + y|^{p-1} + \frac{2^{p+1}N_2(x, y)^{p+1}}{N_2(x, y)^3}$ donc f est $\mathcal{C}^1$ pour $p \geq 3$ alors que si $p = 2$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ donc pas de limite en $(0, 0)$

Exercice 5 [sujet] 1. th généraux

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{x + y} - \frac{x^2 y^2}{(x + y)^2}$

3. $\frac{1}{t}(f(t, 0) - f(0, 0)) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$

4. $f(x, -x + x^6) = \frac{(-1 + x^5)^2}{x^2}$ donc f n'est pas bornée au voisinage de $(0, 0)$.

Exercice 6 [sujet] $f(x, 0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ donc $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 4N_2(x, y)$ donc est continue en $(0, 0)$.

Exercice 7 [sujet] $H(x, 0) = 0$ donc $\frac{\partial H}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\left|\frac{\partial H}{\partial x}(x, y)\right| \leq 4N_2(x, y)^2 + 2N_2(x, y)^2$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue en $(0, 0)$.

$H(0, y) = 0$ donc $\frac{\partial H}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $\left|\frac{\partial H}{\partial y}(x, y)\right| \leq N_2(x, y)^2 + 2N_2(x, y)^2$ donc $\frac{\partial H}{\partial y}$ est aussi continue en $(0, 0)$

Exercice 8 [sujet] 1. f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $|f(x, y)| \leq \frac{x^3 + y^3}{N_2(x, y)^2} \leq 2N_2(x, y)$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$ alors que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$.

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right)$ donc cette limite n'existe pas.

Exercice 9 [sujet] fait en cours; on trouve $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ donc, par le théorème de Schwarz (contraposée), on en déduit que f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 [sujet] 1. quotient

2. facile : commencer par $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$

3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -1$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = 3$ donc f n'est pas $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert) d'après le th de Schwarz

Exercice 11 [sujet] 1. $f_1(x, 0) = |x|$ n'est pas dérivable en 0

2. $f_2(x, 0) = |x|$ idem

3. $f_3(x, 0) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ donc $\frac{1}{x} f_3(x, 0) \rightarrow \begin{cases} +1 & \text{si } x \rightarrow 0^+ \\ -1 & \text{si } x \rightarrow 0^- \end{cases}$ donc pas dérivée partielle selon x en $(0, 0)$.

Exercice 12 [sujet] 1. $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x)$ et $\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$

2. $g'_2(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$

3. $\frac{\partial g_3}{\partial x}(x, y) = g'_2(x) \frac{\partial f}{\partial y}(y, f(x, x))$ et $\frac{\partial g_3}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, f(x, x))$

4. $g'_4(x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(-x, f(x, x)) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x^2) + 2x \frac{\partial f}{\partial y}(x, x^2) \right) \frac{\partial f}{\partial y}(-x, f(x, x^2))$

Exercice 13 [sujet] $\frac{d}{dx} f(x, 2x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, 2x) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, 2x)$

Exercice 14 [sujet] $f(x, 0) = 0$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$; de même $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ mais $f(t, t^2) = \frac{1}{2}$ si $t \neq 0$ donc f n'est pas continue en $(0, 0)$

Exercice 15 [sujet] $l(x+h) = \frac{x+h}{\sqrt{\|x\|^2 + 2(x|h) + o(h)}} = \frac{1}{\|x\|} (x+h) \left(1 + \frac{(x|h)}{\|x\|^2} + o(h) \right) = l(x) + \frac{h}{\|x\|} + \frac{(x|h)}{\|x\|^3} x + o(h)$;

$h \mapsto \frac{h}{\|x\|} + \frac{(x|h)}{\|x\|^3} x$ est linéaire donc c'est $dl(x)$.

On a ensuite $\frac{\partial l}{\partial x_i}(a) = dl(a).e_i = \frac{e_i}{\|a\|} + \frac{a_i}{\|a\|^3} x$ qui est continue pour $a \neq 0$ donc l est $\mathcal{C}^1$

Exercice 16 [sujet] $|u_n(x, y)| \leq \frac{|x|^n}{\sqrt{n}}$ donc f est définie sur $] -1, 1[\times \mathbb{R}$.

f est une série entière par rapport à la variable x avec $R \geq 1$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \sum_{n \geq 1} \sqrt{n} \cos(ny) x^{n-1}$

Par rapport à y , on applique le théorème de dérivation avec $\left| \frac{\partial u_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq \sqrt{n} |x|^{n-1}$ (indépendant de y) donc CN sur $\mathbb{R}$ si $|x| < 1$.

Exercice 17 [sujet] 1. Si $|y| > 1$ alors $f_n(x, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{x}{y} \right)^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$; $f_n(x, \pm 1) =$

$\frac{x^{2n}}{2}$ donc CV si et seulement si $|x| < 1 = |y|$; enfin, si $|y| < 1$ alors $f_n(x, y) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x^{2n}$ (SATP) donc CV si et seulement si $|x| < 1$. Au final $D =] -1, 1[^2 \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |y| \geq 1, |x| < |y|\}$

2. Par rapport à la variable x , $x \mapsto f(x, y)$ est une série entière donc $\mathcal{C}^\infty$. Par rapport à y , c'est une série de fonctions donc on applique le th de dérivation avec $\left| \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) \right| = 2n \frac{|y|^{2n-1} x^{2n}}{(1+y^{2n})^2}$. On étudier le cas $x \geq 0, y \geq 0$ par exemple :

si $|x| < 1$ et $0 \leq y \leq a$ alors $\left| \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2n x^{2n}$ donc CVNTS de $\mathbb{R}^+$; si $|x| \geq 1$ et $y \in [a, +\infty[$ avec $a > x$ (cf D),

alors $\left| \frac{\partial f_n}{\partial y}(x, y) \right| \leq 2n \left(\frac{x}{a} \right)^{2n}$ donc CVNTS de $]x, +\infty[$. Au final f admet des dérivées partielles en tout point de D .

Exercice 18 [sujet] 1. $R = 1$ donc F est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times]-1, 1[$.

2. $|u_n(a, x) - u_n(a', x)| = \left| \frac{(a' - a)x^n}{(n + a)(n + a')} \right| \leq \frac{|a - a'|}{n^2}$ car $a > 0$ et $a' > 0$. On a $|F(a, x) - F(a', x)| \leq |F(a, x) - F(a', x)| + |F(a', x) - F(a', y)| \leq |a - a'| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + |F(a', x) - F(a', y)| \xrightarrow{(a, x) \rightarrow (a', y)} 0$ car $|a - a'| \rightarrow 0$ et par continuité de la série entière sur $] -1, 1[$, $\lim_{x \rightarrow y} F(a', x) = F(a', y)$.

3. Série entière donc $\frac{\partial F}{\partial x}(a, x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{n+a}$. On prouve la continuité de même sur $[-\alpha, \alpha] \times \mathbb{R}^{+*}$ avec $\left| \frac{nx^{n-1}}{n+a} - \frac{nx^{n-1}}{n+a'} \right| \leq \frac{\alpha^{n-1}}{n} |a - a'|$ et $\sum \frac{\alpha^{n-1}}{n}$ CV car $\alpha \in [0, 1[$.

4. Série de fct cette fois $\frac{\partial F}{\partial a}(a, x) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+a)^2}$ (car $\left| \frac{x^n}{(n+a)^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ donc CVN). La continuité s'obtient encore de la même façon avec $\left| \frac{x^n}{(n+a)^2} - \frac{x^n}{(n+a')^2} \right| \leq \frac{(2n+a+a')|a-a'|}{n^4} \leq \frac{2(n+A)}{n^4} |a-a'|$ et le reste ne change pas car $\sum \frac{n+A}{n^4}$ CV.

Exercice 19 [sujet] 1. $D_f = \{(x, y), xy \neq 1\} = \{xy > 1\} \cup \{|xy| < 1\} \cup \{xy < -1\}$

2. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$

3. f est constante sur les trois ouverts (convexes) : $f = \pi$ sur $\{xy > 1\}$; $f = 0$ sur $\{|xy| < 1\}$ et $f = -\pi$ sur $\{xy < -1\}$

Exercice 20 [sujet] 1. $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - 0 \right| \leq \frac{3x^2|y|}{N_2(x, y)^2} + \frac{2x^4|y|}{N_2(x, y)^4} \leq 5N_2(x, y)$ puis $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$ et $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 0 \right| \leq 3N_2(x, y)$ donc f est $\mathcal{C}^1$

2. En fait il faut comprendre que c'est plutôt $\phi(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mapsto \int_0^1 f(x, P(x)) dx$ avec $P = \sum_{i=0}^n x_i X^i$ pour respec-

ter le programme. On a $f(x, y+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + o(h)$ donc pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si $|h| < \eta$ on

a $\left| f(x, y+h) - f(x, y) - h \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| \leq \varepsilon|h|$; comme si $H \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\|H\|_{\infty, [0,1]} \leq \eta$, on a $|H(x)| \leq \eta$ donc

$\left| f(x, P(x) + H(x)) - f(x, P(x)) - H(x) \frac{\partial f}{\partial x}(x, P(x)) \right| \leq \varepsilon \|H\|_{\infty}$ donc $\left| \phi(P+H) - \phi(P) - \int_0^1 H(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x)) dx \right| \leq$

$\varepsilon \|H\|_{\infty}$. Comme $H \mapsto \int_0^1 H(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x)) dx$ est linéaire, on en déduit $d\phi(P).H = \int_0^1 H(x) \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x)) dx$ puis

$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = d\phi(P).X^i = \int_0^1 x^i \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x)) dx$. Reste la continuité de ces dérivées partielles : f est $\mathcal{C}^1$ donc, pour $\varepsilon > 0$, il

existe $\eta > 0$ tel que si $U \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifie $\|U\|_{\infty} \leq \eta$ alors $\|(P+U)-P\|_{\infty} \leq \eta$ donc $\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x) + U(x)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, P(x)) \right| \leq$

ε et en intégrant $\left| \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(P+U) - \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(P) \right| \leq \varepsilon \int_0^1 x^i dx \leq \varepsilon$ donc $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ est continue et ϕ est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 21 [sujet] $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 2f'(x^2 + y^2) + 4x^2 f''(x^2 + y^2)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = 2f'(x^2 + y^2) + 4y^2 f''(x^2 + y^2)$; on doit donc avoir $4f'(t) + 4tf''(t) = t^p$ pour $t > 0$. On trouve $f(t) = \alpha \ln(t) + \beta + \frac{t^{p+1}}{4(p+1)^2}$

Exercice 22 [sujet] 1. On intègre $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ donc on pose $g(x, y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt + \varphi(x)$; si y est fixé et $x \in [\alpha, \beta]$, par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ sur le fermé borné $[\alpha, \beta] \times [0, y]$, on a $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right| \leq C$ (intégrable sur le segment $[0, y]$) donc $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt + \varphi'(x) = - \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t) dt + \varphi'(x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right]_{t=0}^{t=y} + \varphi'(x)$; il suffit donc de prendre ensuite $\varphi(x) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$.

2. Si $h(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ alors $\left| \frac{\partial h}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq M_R$ qui existe par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur le fermé borné

$B_f((0, 0), R)$ (intégrable sur $[0, 2\pi]$) donc $\phi'(r) = \int_0^{2\pi} \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$

3. Avec 1, on a $r\phi'(r) = \int_0^{2\pi} r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = \left[g(r \cos \theta, r \sin \theta) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0$
 ϕ' est nulle sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc sur $\mathbb{R}$ par continuité en 0. $\phi(r) = \phi(0) = 2\pi f(0, 0)$
 4. $= 2\pi f(a, b)$ de la même façon

Exercice 23 [sujet] $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$

1. $r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta)$ donc $g(r, \theta) = \alpha(r)$ et $f(x, y) = \beta(x^2 + y^2)$ ($\beta(t) = \alpha(\sqrt{t})$)
 2. $r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ donc $g(r, \theta) = r + \alpha(\theta)$

Exercice 24 [sujet] $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$; $r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta)$ donc $r \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) - g(r, \theta) = -r^2$ puis $g(r, \theta) = \alpha(\theta)r - r^2$.

Exercice 25 [sujet] $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{1}{x^2} \left[2 \left(\frac{y}{x} \right) f' \left(\frac{y}{x} \right) + \left(\left(\frac{y}{x} \right)^2 - 1 \right) f'' \left(\frac{y}{x} \right) \right]$ donc $f''(t) + \frac{2t}{t^2 - 1} f'(t) = \frac{t}{t^2 - 1}$ et on trouve $f(t) = \alpha \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| + \beta + \frac{t}{2}$ sur $]-\infty, -1[$ ou sur $]1, +\infty[$. Au final $f(t) = \beta + \frac{t}{2}$ sur $\mathbb{R}$ (recollement)

Exercice 26 [sujet] 1. $\begin{cases} u = x^2 + y^2 \\ v = x + y \end{cases}$ si et seulement si x et y sont les racines de $2X^2 - 2vX + v^2 - u$; ses deux

racines sont réelles et distinctes si et seulement si $2u - v^2 > 0$; on a alors (avec $x > y$) $\begin{cases} x = \frac{v + \sqrt{2u - v^2}}{2} \\ y = \frac{v - \sqrt{2u - v^2}}{2} \end{cases}$ donc

ϕ^{-1} est aussi $\mathcal{C}^1$

2. $y \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (y - x) \frac{\partial g}{\partial v}(x^2 + y^2, x + y)$ donc f est solution si et seulement si $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 2vg(u, v)$
 3. $g(u, v) = \alpha(u)e^{v^2}$ et $f(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)e^{(x+y)^2}$ avec $\alpha \in \mathcal{C}^1$

Exercice 27 [sujet] $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible donc le changement de variable est bijectif (la réciproque est aussi linéaire donc $\mathcal{C}^1$); $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y)$ donc $\frac{\partial g}{\partial u} = g$, $g(u, v) = \alpha(v)e^u$ et $f(x, y) = \alpha(u - y)e^{x+y}$ avec $\alpha \in \mathcal{C}^1$.

Exercice 28 [sujet] 1. $\partial_1 h(u, v) = \alpha \partial_1 g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v) + \beta \partial_2 g(\alpha u + \beta v, \beta u - \alpha v)$

2. Si $\alpha = \beta = 1$, on a $\partial_1 h(u, v) = 0$ donc $h(u, v) = \varphi(v)$

3. $(u, v) \mapsto (u + v, u - v)$ est bien bijectif; $v = \frac{x - y}{2}$ donc $g(x, y) = \psi(x - y)$ avec $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 29 [sujet] Si $u = x$ et $v = x + 2y$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible (la réciproque est linéaire donc $\mathcal{C}^1$ aussi);

$2 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2 \frac{\partial g}{\partial u}(x, x + 2y)$ donc $g(u, v) = \alpha(v)$ et $f(x, y) = \alpha(x + 2y)$ avec $\alpha \in \mathcal{C}^1$.

Exercice 30 [sujet] $f(x, y) = g(x + y, x - y)$ donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + y, x - y)$ (par Schwarz) donc $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{4}$, $\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{1}{16} \left(\frac{u^3}{3} - uv^2 + \alpha(v) \right)$ et $g(u, v) = \frac{1}{16} \left(\frac{u^3}{3} v - u \frac{v^3}{3} + \beta(v) + \gamma(u) \right)$ avec β et $\gamma \in \mathcal{C}^1$ ($\beta' = \alpha$)

Exercice 31 [sujet] Si $f(x, y) = g(x + ay, x + by)$ alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (1 - a)(1 - 2a) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(x + ay, x + by) + (2 - 3(a + b) + 4ab) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x + ay, x + by) + (1 - b)(1 - 2b) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(x + ay, x + by)$; on peut donc choisir $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$ est inversible (la réciproque est linéaire donc $\mathcal{C}^2$) et on a $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$ donc $g(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$ avec α et $\beta \in \mathcal{C}^2$.

Exercice 32 [sujet] Le changement est bijectif de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a \neq b$. On pose $f(x, y) = g(x + ay, x + by)$; comme $\varphi : (x, y) \mapsto (1 + ax, 1 + by)$ est bijective et linéaire (donc $\mathcal{C}^2$ de même que φ^{-1}), f et g sont simultanément $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. On vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (1 - a)(1 - 2a) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + (2 - 3(a + b) + 4ab) \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} + (1 - b)(1 - 2b) \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$; on peut choisir $a = 1$ et $b = \frac{1}{2}$, il reste $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ donc $g(u, v) = \alpha(u) + \beta(v)$ et $f(x, y) = \alpha(x + y) + \beta\left(x + \frac{1}{2}y\right)$ avec α et $\beta \in \mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 [sujet] 1. Facile

2. $t \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, yz) = t^a \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ en dérivant par rapport à x
3. $f(x, y, z) = f(tx, ty, tz) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f(0, 0, 0)$ car f est continue en $(0, 0, 0)$; E_0 est l'ensemble des fonctions constantes
4. $g'(t) = x \frac{\partial f}{\partial x}(tx, ty, tz) + y \frac{\partial f}{\partial y}(tx, ty, tz) + z \frac{\partial f}{\partial z}(tx, ty, tz) - at^{a-1} f(x, y, z)$, on en déduit l'équation différentielle; $g(t) = \alpha t^a$ avec $g(1) = 0$ donc $g = 0$ et $f \in E_a$.
si $f \in E_a$ alors $g(t) = 0$ donc $g'(1) = 0$ qui donne la relation

Exercice 34 [sujet] 1. $(0, 0)$ est le seul point critique

2. $f(x, x^2) - f(0, 0) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^3$ qui ne garde pas un signe fixe donc pas d'extremum en $(0, 0)$, ni ailleurs car f est $\mathcal{C}^1$ et $\mathbb{R}^2$ est ouvert

Exercice 35 [sujet] $(0, 0)$ est le seul point critique puis $f(x, x^3) - f(0, 0) = x^5 + \ln\left(1 + \frac{x^6}{4}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x^5$ (qui change de signe) donc pas d'extremum en $(0, 0)$.

Exercice 36 [sujet] $g(x, \lambda x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \lambda^2 x^2 \geq 0$ si $\lambda \neq 0$ et $g(x, 0) = 3x^4 \geq 0$. Par contre $g(x, 2x^2) = -4x^4$ donc pas de minimum local en $(0, 0)$

Exercice 37 [sujet] Un seul point critique $(3, -1)$ $f(3 + h, -1 + k) - f(3, -1) = h^2 + hk + k^2 = \left(h + \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}k^2 \geq 0$ donc min local en $(3, -1)$.

Exercice 38 [sujet] les points critiques sont $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$ (et d'autres qui se trouvent par permutations de x, y et z); $f(x, y, z) \underset{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)}{\sim} x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$ donc minimum local en $(0, 0, 0)$; $f(1 + h, 1 + k, 1 + l) - f(1, 1, 1) = k^2 + h^2 + l^2 - 2hk - 2hl - 2kl - 2hkl$ donc $f(1 + h, 1, 1) - f(1, 1, 1) = h^2 \geq 0$ et $f(1 + t, 1 + t, 1 + t) - f(1, 1, 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -3t^2 \leq 0$ donc par d'extremum en $(1, 1, 1)$. Idem en $(1, -1, -1)$ car $f(x, y, z) = f(x, -y, -z)$

Exercice 39 [sujet] 5 points critiques $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$ et $(0, \pm 1/\sqrt{3})$. $f(0, 0) = 0$ et $f(0, 1) = 0$ donc minimum (absolu) en $(0, 0)$ et $(0, 1)$ car $f \geq 0$; $f(x, 1/\sqrt{3}) - f(0, 1/\sqrt{3}) = x^2 \geq 0$ et $f(0, t) - f(0, 1/\sqrt{3})$ admet un maximum local en $1/\sqrt{3}$ donc pas d'extremum local en $(0, 1/\sqrt{3})$. De même pour les 2 autres puisque $f(x, y) = f(x, -y)$

Exercice 40 [sujet] Un seul point critique $(2, 1)$ et $(\mathbb{R}^{+*})^2$ est ouvert. $f(2 + h, 1 + k) - f(2, 1) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\sim} hk + \frac{1}{2}h^2 + 2k^2 = 2\left(k + \frac{h}{4}\right)^2 + \frac{3}{8}h^2 \geq 0$ donc minimum local en $(2, 1)$.

Exercice 41 [sujet] Pas de point critique sur $\overset{\circ}{D}$ (ouvert) donc les extrema de f , continue, sur D , fermé borné, sont atteints sur la frontière de D ; $f(x, 0) = x^2$ est maximal en 1 et minimal en 0; $f(\cos \theta, \sin \theta) = 1 - \frac{1}{2} \sin(2\theta)$ est maximal en 0 et $\frac{\pi}{2}$, minimal en $\frac{\pi}{4}$. Au final $\min_D(f) = f(0, 0) = 0$ et $\max_D(f) = f(1, 0) = 1$

Exercice 42 [sujet] f est continue sur $K = [-1, 1]^2$, fermé borné donc f admet des extrema absolus sur K . $f \geq 0$ et $f(0, 0) = 0$ donc $\min_K f = 0$. Les points critiques sur $\overset{\circ}{K} =]-1, 1[^2$ sont les points de la forme $(x, 0)$; aucun ne peut être le maximum donc il est atteint sur la frontière de K . $f(x, 1) = x^4 + \ln(2)$ est maximal en 1 (et -1); $f(1, y) = y^3 + \ln(1 + y^2)$ est maximal en 1 donc $\max_K f = f(1, 1) = 1 + \ln(2)$. Pas d'extremum local supplémentaire.

Exercice 43 [sujet] 1. $\frac{1}{x}(g(x, 0) - g(0, 0)) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ donc $\frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 0$ et de même, $\frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Puis $\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \right| = \left| 2y \ln \|(x, y)\|_2 + \frac{2x^2 y}{\|(x, y)\|_2^2} \right| \leq 2\|(x, y)\|_2 \left| \ln \|(x, y)\|_2 \right| + \frac{2\|(x, y)\|_2^3}{\|(x, y)\|_2^2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ de même pour $\frac{\partial g}{\partial y}$ donc g est $\mathcal{C}^1$

2. g est continue sur D qui est fermé borné non vide

3. $g(0,0) = 0$ et $g(x,x) = 2x^2 \ln(x) < 0$ si $x > 0$ donc pas de minimum en $(0,0)$. Comme $g(x,-x) = -x^2 \ln(x) > 0$, pas de maximum non plus.

$g = 0$ sur tout le bord de D ; sur $D_1 = D \cap (\mathbb{R}^2)^2$, $g \leq 0$ donc tous les points du bord de D_1 sauf $(0,1)$ et $(1,0)$ sont des maximum; pas de maximum en $(0,1)$ car $g > 0$ sur l'autre quart de disque à côté de $(0,1)$. Au final, tous les points du bord de D sont des extremum sauf $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$.

Exercice 44 [sujet] $f \geq 0 = f(0,0)$ donc $\min_T f = 0$; f est continue sur T , fermé borné, donc $\max_T f$ existe; comme $f = 0$ sur la frontière de T , $\max_T f$ est atteint en un point de $\overset{\circ}{T}$ donc en un point critique. Le seul point critique est $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ donc $\max_T f = f\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Exercice 45 [sujet] 1. si $x \geq y$, $|f(x,y)| \leq \frac{xy}{(1+x)(1+y)2y} = \frac{x}{2(1+x)(1+y)} \leq \frac{x}{2} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$ et on fait de même dans l'autre cas

2. si $x \geq y$, $f(x,y) \leq \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{2(1+y)} \leq \frac{1}{2}$ et de même si $y \geq x$

3. f est continue sur K , fermé borné non vide en dimension finie, donc $M = \max_K(f)$ existe. Comme $(1,1) \in K$, on a $M \geq f(1,1) = \frac{1}{8}$ et si $(x,y) \notin K$ alors $f(x,y) = \frac{x}{1+x} \frac{y}{1+y} \frac{1}{x+y} \leq 1 \times 1 \times \frac{1}{20} < f(1,1) \leq M$ donc $M = \max_D(f)$ aussi (et existe)

4. Si $x = 0$ ou $y = 0$ alors $f(x,y) = 0$ donc M est atteint sur $\overset{\circ}{D} = (\mathbb{R}^{+*})^2$ qui est un ouvert et f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{D}$ donc M est atteint en un point critique. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(y-x^2)}{(1+y)(1+x)^2(x+y)^2}$ (et sym pour y) donc (x,y) est un point critique si et seulement si $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ donc $M = f(1,1) = \frac{1}{8}$.

Exercice 46 [sujet] 1. f est continue et $E = [-2,2]^2$ est fermé borné donc f admet des extrema absolus sur A . Les extrema locaux sont atteints soit en un point critique de $\overset{\circ}{A}$, soit sur la frontière de A . Les points critiques dans $\overset{\circ}{A}$ sont $(0,0)$, $\pm(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

2. $f(x,x) = 2x^4 \geq 0$ et $f(x,-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -2x^2 \leq 0$ donc pas d'extremum local en $(0,0)$

3. $f(\sqrt{2}+h, -\sqrt{2}+k) - f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{\sim} 10\left(h + \frac{k}{10}\right)^2 + \frac{99}{100}k^2 \geq 0$ donc minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; de même en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ puisque $f(-x, -y) = f(x, y)$. Reste la frontière de A : si $y \in [-2, 2]$, $f(2, y) = y^4 - 2(y-2)^2 + 16 = g(y)$. En étudiant les variations de g (signe de g''), on trouve que g est minimale en un point $y_0 \in \left[-2, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right]$ et maximale en $y = 2$ avec $g(2) = 32$ (idem sur les 3 autres côtés). On a donc $\max_A f = f(2, 2) = f(-2, -2) = 32$. Pour le minimum sur A , il faut comparer la valeur de $f(2, y_0)$ et celle de $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$: on a $y_0 \in \left[-\frac{5}{3}, -\frac{3}{2}\right]$ (vérifier $g'\left(-\frac{5}{3}\right) < 0$ et $g'\left(-\frac{3}{2}\right) > 0$) donc $(y_0 - 2)^2 \leq \left(2 + \frac{5}{3}\right)^2 = \left(\frac{11}{3}\right)^2$ puis $g(y_0) = y_0^4 - 2(y_0 - 2)^2 + 16 \geq \left(\frac{3}{2}\right)^4 - 2\left(\frac{11}{3}\right)^2 + 16 > -8 = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ (ouf!). En étudiant les 3 autres côtés du carré A , on trouve de même et on peut, enfin, conclure $\min_A f = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = -8$. Pas d'autre extremum local sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert) puisqu'il n'y a pas de point critique hors de A .

Exercice 47 [sujet] 1. $z_M = R(1+e^{ia})$ et $z_{M'} = R(-1+e^{ib})$ puis $S = \frac{1}{2} |\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'})| = \frac{R^2}{2} \begin{vmatrix} 1 + \cos(a) & -1 + \cos(b) \\ \sin(a) & \sin(b) \end{vmatrix}$

2. f est continue sur $[0, \pi]^2$ qui est fermé borné

3. facile

4. $f\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; sur la frontière de $[0, \pi]^2$, le triangle est aplati donc $S = 0$, le triangle d'aire maximal est obtenu en un point de $]0, \pi[^2$ donc en un point critique qui est unique.

Exercice 48 [sujet] 1. f est continue et D fermé borné; $f \geq 0 = f(0,0)$ donc $\min f = 0$

2. développer

3. il n'y a que $(0,0)$

4. comme le seul point critique dans D' est le minimum, le maximum est sur la frontière.
5. étudier $t \mapsto \operatorname{sh}(t) - t$ et $t \mapsto t - \sin(t)$
6. signe de g' avec ce qui précède puis $\max f = g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(0, 1)$

Exercice 49 [sujet] 1. $[2\sqrt{2}\cos(t)]^2 + 2[2\sin(t)]^2 = 8$ et si $(x, y) \in E$, on a $\left|\frac{x}{2\sqrt{2}} + i\frac{y}{2}\right|^2 = 1$ donc il suffit de prendre un argument du complexe $\frac{x}{2\sqrt{2}} + i\frac{y}{2}$

2. a) f est continue sur Δ fermé borné non vide dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension finie
- b) f est $\mathcal{C}^1$ sur $\overset{\circ}{\Delta}$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, espace de dimension finie, donc si f admet un extremum en (x, y) alors (x, y) est un point critique de f . On vérifie que $(0, 0)$ est le seul point critique dans $\overset{\circ}{\Delta}$; $f(0, 0) = 1 \leq f(x, y)$ donc le minimum de f sur $\overset{\circ}{\Delta}$ est $1 = f(0, 0)$
- c) On a toujours $f \geq 1$ sur Δ donc $\min_{\Delta} f = f(0, 0) = 1$. Par contre $M = \max_{\Delta} f$ est atteint en un point du bord de Δ donc en un point $(x, y) = \phi(t)$. On étudie donc $g(t) = f \circ \phi(t) = \sqrt{5 + 4\cos^2 t} + 8\cos^2 t$ qui est maximale en $t = 0$ donc $M = f(2\sqrt{2}, 0) = 11$.

Exercice 50 [sujet] 1. $\nabla f(1, 1) = (4, -2)$ donc plan tngt $4(x - 1) - 2(y - 1) - z = 0$; $\nabla f(1, 2) = (-4, 0)$ donc plan tngt $4(x - 1) + (z + 1) = 0$

2. $f(x, 2x^2) = -x^4 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$ donc pas de minimum absolu et comme $f(x, 0) = 3x^4 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, pas de maximum absolu non plus.
3. si $a \neq 0$, $f(x, ax) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (ax)^2 \geq 0$, $f(x, 0) = 3x^4 \geq 0$ et $f(0, y) = y^2 \geq 0$ pourtant pas de minimum local en 0 car $f(x, 2x^2) = -x^4 < 0$ si $x \neq 0$.
 $\mathbb{R}^2$ est ouvert donc les extrema locaux sont des points critiques, donc en $(0, 0)$ seulement, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 51 [sujet] 1. a est un point critique (cours); c/ex $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur $B_f(0, 1)$

2. $\nabla f(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2x(ax + by) = 0 \\ b - 2y(ax + by) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{b}{a}x \\ x = \frac{\pm a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}} \end{cases}$
3. Par croissance comparée, on a $\lim_{\|(x, y)\|_2 \rightarrow +\infty} f(x, y) = 0$. On suppose $a > 0$ et $b > 0$ (par ex), on note $X_+ = \left(\frac{a}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}, \frac{b}{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}\right)$ et $X_- = -X_+$ les pts critiques de f puis $m = f(X_-)$ et $M = f(X_+)$. Comme $m < 0$ et $M > 0$, il existe $r > 0$ tel que, pour $\|(x, y)\|_2 > r$, on ait $\frac{m}{2} < f(x, y) < \frac{M}{2}$. Puis f est continue sur $B_f(0, r)$ (fermée bornée non vide) donc admet sur $B_f(0, r)$ un min et un max. On a par ex, $\max_{B_f(0, r)} f \geq M$ car $X_+ \in B_f(0, r)$, donc $\max_{B_f(0, r)} f$ est en fait le maximum de f sur $\mathbb{R}^2$ entier. Comme $\mathbb{R}^2$ est un ouvert, ce max est atteint en un point critique donc en X_+ (idem avec X_- pour le min). Il ne peut pas y avoir d'autre extremum local car $\mathbb{R}^2$ est ouvert et il n'y a pas d'autre pt critique.

Exercice 52 [sujet] 1. cours endomorphismes symétriques

2. calculer $f(x + h)$ et vérifier $\nabla f(x) = f(x) - u$ (en utilisant f symétrique)
3. Le point critique est $x_0 = f^{-1}(u)$, puis on vérifie $g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2}(f(x - x_0)|x - x_0) > 0$ si $x \neq x_0$.

Exercice 53 [sujet] 1. On pose $f(x, y, z) = xy - z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -1$ ne s'annule pas donc tous les points sont réguliers.

2. Le plan tngt en M_0 contient D si et seulement si il contient le point $(2, -3, 0)$ (un point de D) et si $\nabla f(M_0) \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (un vecteur directeur de D) on en déduit $x_0 = \frac{1}{2}$ et $(2 - x_0)y_0 - (3 + y_0)x_0 = -z_0$ avec $x_0y_0 = z_0$; on trouve $x_0 = \frac{1}{2} = z_0$ et $y_0 = 1$

Exercice 54 [sujet] 1. On pose $f(x, y, z) = xyz - 1$; l'équation du plan tangent $(\mathcal{P}_0)$ en M_0 est $(x - x_0)y_0z_0 + (y - y_0)x_0z_0 + (z - z_0)x_0y_0 = 0$.

2. On a $\overrightarrow{OP_0} \perp (\mathcal{P}_0)$ donc $\overrightarrow{OP_0} = \lambda \nabla(f)(M_0)$, soit $\begin{cases} x = \lambda y_0 z_0 \\ y = \lambda x_0 z_0 \\ z = \lambda x_0 y_0 \end{cases}$ et $M_0 \in \mathcal{P}_0$ donc, en remplaçant dans l'équation de $(\mathcal{P}_0)$, on trouve $\lambda = \frac{1}{(x_0 y_0)^2 + (x_0 z_0)^2 + (y_0 z_0)^2}$

Exercice 55 [sujet] On a $D \parallel \mathcal{P}_0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \perp \nabla(f)(M_0) = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 2y_0 \\ 2z_0 \end{pmatrix}$ donc si et seulement si $x_0 + y_0 = 0$; comme $M_0 \in S$, on a aussi $x_0^2 + y_0^2 - z_0^2 = 1$, ce qui donne $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y = 0 \text{ et } x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$

Exercice 56 [sujet] 1. $\nabla(f)(M) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 3x^2 + y \\ x - 2y \\ -1 \end{pmatrix}$ ne s'annule jamais

2. $(\mathcal{P}_0)$ est parallèle à xOy si et seulement si $\nabla(f)(M) \parallel \vec{k}$ donc si et seulement si $\nabla(f)(M) \wedge \vec{k} = \vec{0}$, ie si et seulement

si $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x^3 - 3x^2 + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/8 \text{ et } y = 5/16 \\ \text{ou} \\ x = 7/8 \text{ et } y = 7/16 \end{cases}$, on calcule alors la valeur de z en utilisant l'équation de (S) .