

TD22 : Endomorphismes autoadjoints

Exercice 1 (CCP PSI 2015)

- Justifier que $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et donner une base orthonormale de vecteurs propres.
- Donner une CNS sur (u_0, v_0, w_0) pour que les suites (u_n) , (v_n) et (w_n) convergent :
$$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$$

Exercice 2 (CCINP PSI 2024)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = I_n$ et $MM^T = M^T M$

- Montrer que $M^T M$ est diagonalisable puis déterminer $M^T M$
- Déterminer M si $n = 3$.

Exercice 3 (CCINP PSI 2024)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(M^T M)^2 = I_n$.

- À l'aide du déterminant, montrer que M est inversible.
- En déduire que M est symétrique.
- Conclure que $M = I_n$.

Exercice 4 (Mines-Ponts PSI 2024)

Soient p et q deux projecteurs orthogonaux de E , espace euclidien.

- Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
- Montrer que $\text{Sp}(u) \subset [0, 2]$ puis déterminer $\ker(u)$ et $\ker(u - 2id)$.

Exercice 5 (Mines-Télécom PSI 2022)

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ non nulle ; montrer que $\frac{(\text{Tr } A)^2}{\text{Tr}(A^2)} \leq \text{rg}(A)$. (*)

Exercice 6 (Mines-Ponts PSI 2019)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique ; on suppose $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.

- Montrer qu'il existe une unique matrice $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $\text{Sp}(R) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et $B = R^2$.
- En déduire que AB est diagonalisable. (*)
- Montrer que si $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$ alors $\text{Sp}(AB) \subset \mathbb{R}^+$.

Exercice 7 (Mines-Ponts PSI 2021)

Soit $(U, V) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^2$ tel que $\forall X \in \mathbb{R}^n, (UX|X) \geq 0$ et $(VX|X) \geq 0$, $(|)$ désignant le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\det(U + V) \geq \det(U) + \det(V)$. On pourra commencer par le cas où U et V ne sont pas inversibles, puis $V = I_n$ et enfin $V \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ quelconque. (*)

Exercice 8 (Centrale PSI 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = A^T A$.

- Montrer que les valeurs propres de B sont positives. On note $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$ les valeurs propres de B .
- On pose $N(A) = \sup_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}$. Montrer que $N(A) = \sqrt{\lambda_p}$.
- On suppose à présent A inversible. On pose $C(A) = N(A) \cdot N(A^{-1})$. Exprimez C en fonctions des valeurs propres de B .

Indications

Exercice 5

Calculer avec les valeurs propres de A plutôt que ses coefficients.

Exercice 6

- Vérifier que R est inversible et trouver une matrice symétrique semblable à AB .

Exercice 7

- * Si U et V non inversible, montrer $\text{Sp}(U + V) \subset \mathbb{R}^+$.
- * Dans le cas V inversible, écrire $V = MM^T$ et se ramener au cas $V = I_n$.