TD23 : Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1 **(CCINP PSI 2023)**

Soient $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x+y=0\}$ et $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x+y} & \text{si } (x,y) \notin F \\ 0 & \text{si } (x,y) \in F \end{cases}$

1. Justifier que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus F)$

2. Montrer que, si $(x,y) \notin F$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3f(x,y)$

3. Existence et valeurs de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$?

4. f est-elle continue en $(0,0)$? *(*)*

Exercice 2 **(ENSEA PSI 2021)**

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^3 - x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

2. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; f est-elle $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$? *(*)*

Exercice 3 **(Centrale PC 2011)**

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

1. Montrer qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial g}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\partial g}{\partial x}$ (on pourra utiliser deux intégrales). *(*)*

2. Montrer que $\phi : r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. *(*)*

3. Montrer que $r\phi'(r) = 0$ et conclure que ϕ est constante. *(*)*

4. Que dire de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$?

Exercice 4 **(Centrale PSI 2014)**

1. Montrer que $\phi : (x,y) \mapsto (x^2+y^2, x+y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ de $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > y\}$ sur $\{(u,v) \in \mathbb{R}^2, 2u - v^2 > 0\}$; vérifier que ϕ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^1$. *(*)*

2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et g telle que $f = g \circ \phi$. Montrer que f vérifie $y\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) - x\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2(y^2 - x^2)f(x,y)$ si et seulement si g vérifie une équation aux dérivées partielles à déterminer.

3. Résoudre cette dernière équation et trouver f.

Exercice 5 **(Mines-Ponts PSI 2019)**

Résoudre sur $\mathbb{R}^2$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$; on pourra utiliser le changement de variable $u = x + ay$ et $v = x + by$ *(*)*

Exercice 6 **(CCINP PSI 2018)**

Trouver les extrema de $f : (x,y) \mapsto x^2y + \ln(4+y^2)$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7 **(Centrale PSI 2024)**

Soient $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 = 8\}$ et $\phi : t \mapsto (2\sqrt{2}\cos(t), 2\sin(t))$.

1. Montrer que ϕ réalise une bijection de $[0, 2\pi[$ sur E. *(*)*

2. Soient $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + 2y^2 \leqslant 8\}$ et $f : (x,y) \mapsto \sqrt{1+x^2+y^2} + x^2$.

a) Justifier que f admet sur Δ un maximum et un minimum.

b) Étudier les extremum de f sur $\overset{o}{\Delta}$

c) Déterminer le maximum et le minimum de f sur Δ

Exercice 8 **(CCP PSI 2013)**
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ autoadjoint défini positif.

1. Pour $u \in \mathbb{R}^n$, on définit g par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$. Montrer que g admet des dérivées partielles et les expliciter. *(*)*

2. Montrer que g admet un unique point critique et que ce point critique est un minimum global. *(*)*

Exercice 9 **(Centrale PC 2010)**
Soit (S) la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$; trouver l'ensemble Γ des points de S où la droite $\mathcal{D}$ d'équations $\left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$ est parallèle au plan tangent à S.

Indications

Exercice 1

4. *Étudier $f(x, -x + x^\alpha)$ avec $\alpha > 0$ bien choisi.*

Exercice 2

3. *Changer de notation si besoin : poser $f_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ pour calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.*

Exercice 3

1. *On ne peut pas calculer les primitives mais on peut toujours les « écrire » en utilisant un symbole intégral.*

2. *Penser au théorème des bornes atteintes pour la domination.*

3. *Reconnaître une dérivée dans l'intégrale qui définit $r\phi'(r)$.*

Exercice 4

1. *Déterminer ϕ^{-1}.*

Exercice 5

Comme pour l'exercice **2** *si nécessaire*

Exercice 7

1. *Pour la surjectivité, on peut introduire le complexe $z = x + iy\sqrt{2}$.*

Exercice 8

1. *Revenir à la définition, en introduisant e_i un vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.*

2. *Les calculs sont plus faciles en posant $x = x_0 + h$ avec x_0 le point critique.*